Über Vektorfelder in dreidimensionalen isolierten Singularitäten

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
MANFRED REGEL
aus Castrop-Rauxel

1984

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Über Vektorfelder in dreidimensionalen isolierten Singularitäten

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
MANFRED REGEL
aus Castrop-Rauxel

1984

Tag der mündlichen Qualifikation: 26. Juni 1984

Dekan:	Professor Dr. Ulrich Felgner
1. Berichterstatter:	Professor Dr. Günter Scheja
2. Berichterstatter:	Professor Dr. Wilhelm Kaup

---

gedruckt bei H.- J. Köhler · Reprografischer Betrieb · Tübingen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung		S. I
§ 0	Bezeichnungen und Verabredungen	S. 1
§ 1	Grundlegendes über semihomogene Algebren	S. 2
§ 2	Die dreidimensionalen jungschen Ringe	S. 12
§ 3	Klassifikation der dreidimensionalen jungschen Ringe	S. 29
§ 4	Die Ringe vom Typ I und II	S. 41
§ 5	Klassifikation der Ringe vom Typ I und II	S. 45
§ 6	Indefinit-homogene Derivationen	S. 58
Literaturverzeichnis		S. 65

Einleitung

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher ist das Klassifikationsproblem komplexer Räume eines der Hauptprobleme, das auch heute noch weit von seiner Lösung entfernt ist.

Selbst das lokale Problem, Keime komplexer Räume zu klassifizieren, führt auf tiefliegende Schwierigkeiten. Die algebraische Übersetzung des Problemes ist die Klassifikation der analytischen Algebren bis auf Isomorphie. Im ein- und zweidimensionalen Fall liegen darüber viele befriedigende Resultate vor.

In dieser Arbeit versuchen wir, "einfache" Typen von dreidimensionalen Algebren zu klassifizieren. Wir werden stets voraussetzen, daß unsere Algebren normale, isolierte Singularitäten sind, und auch noch weitere einschränkende Eigenschaften haben. Selbst diese Klasse von Algebren ist noch zu groß, um eine konkrete Klassifikation zu ermöglichen. Daher ist man gezwungen, zusätzliche Strukturen auf den Algebren anzunehmen. Als eine der aussagekräftigsten Strukturen haben sich die Derivationen erwiesen. So kann man bekanntlich die Homogenität von Algebren durch die Existenz einer diagonalisierbaren Derivation mit positiven ganzzahligen Eigenwerten charakterisieren. [Sch-W1] . Wir werden in dieser Arbeit die Voraussetzung der positiven Eigenwerte abschwächen zu nichtnegativen Eigenwerten. In §6 lassen wir beliebige ganzzahlige Eigenwerte zu.

In §1 werden semihomogene Derivationen definiert und einige grundlegende Hilfssätze darüber bewiesen.

In §2 und §3 beginnen wir mit der Klassifikation. Und zwar nehmen wir zu den obigen Bedingungen noch hinzu, daß es sich um fastfaktorielle Algebren handelt, und daß das Ideal, das von den Eigenvektoren zu positiven Eigenwerten erzeugt wird, einskodimensional ist. Dann gelingt es uns, diese Algebra konkret als den Invariantenring einer endlichen zyklischen Gruppe auf einer dreidimensionalen, regulären, analytischen Algebra darzustellen. In Analogie zum zweidimensionalen Fall, wo ähnlich gebaute Ringe jungsche Ringe heißen [Sch-W4] , nennen wir diesen Typ dreidimensionale jungsche Ringe. In §2 werden diese Ringe vorgestellt und ihre Eigenschaften hergeleitet. In §3 wird die eigentliche Klassifikation dargestellt. Die Beweisidee des recht technischen Beweises ist es, unsere Algebra in einen Oberring einzubetten, auf dem die fortgesetzte Derivation eine so einfache Gestalt annimmt, daß man diesen Oberring als regulären Ring erkennen kann.

In §4 und §5 betrachten wir den Fall, daß das Ideal, das von den Eigenvektoren zu positiven Eigenwerten erzeugt wird, zweikodimensional ist. Wir verzichten auf die Forderung, daß der Ring fastfaktoriell ist, und setzen stattdessen eine technische Bedingung über den Kern der Derivation voraus. Auch die Bedingung, daß unsere Algebra eine isolierte Singularität ist, wird abgeschwächt. In §4 werden wieder nur die Typen vorgestellt und in §5 erfolgt die Klassifikation. Die

Beweisidee ist es in diesem Fall, in einem passenden Oberring ein geeignetes Polynom in Linearfaktoren zu zerlegen. Die Existenz solcher Zerlegungen geht bereits auf Newton zurück.

In §6 lassen wir als Eigenwerte der Derivation auch negative ganze Zahlen zu. Wir betrachten nur den typischen Fall, daß positive und negative Eigenwerte vorkommen. Über die Algebra setzen wir in diesem Falle verschärfend voraus, daß sie faktoriell ist. Es gelingt uns dann, die Algebra als konkrete Hyperfläche darzustellen.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele ermutigende Diskussionen möchte ich an dieser Stelle meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. Günter Scheja, herzlich danken.

§ 0 Bezeichnungen und Verabredungen

Unter Ringen verstehen wir im folgenden immer kommutative (assoziative) Ringe mit Eins. Ringhomomorphismen sind stets unitär.

Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die natürlichen Zahlen einschließlich Null.

Unter k soll immer ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null verstanden werden, der eine vollständige Bewertung trage. Dann kann man die konvergenten Potenzreihenringe, die wir mit $k\langle X_0,\ldots,X_n\rangle$ bezeichnen, bilden. Deren Restklassenringe nennen wir die analytischen k-Algebren. Analytische k-Algebren sind bei uns also stets lokale Ringe. Für die Grundlagen analytischer Algebren verweisen wir auf [G-R], an deren Bezeichnungen wir uns auch halten wollen.

Wir schließen den Fall der diskreten Bewertung des Körpers k mit ein, so daß unsere Sätze auch für den kompletten Fall gelten.

Lokale Ringe sind hier stets noethersche Ringe. Normale Ringe sind stets Integritätsringe. Isolierte Singularitäten sind stets lokal. Für einen Ring A bezeichne $\mathfrak{m}_A$ das Jacobsonradikal dieses Ringes.

§1 Grundlegendes über semihomogene Algebren

(1.1) Def: Sei A eine analytische k-Algebra. δ heißt eine semihomogene Derivation auf A, wenn δ eine k-Derivation von A ist und es ein Erzeugendensystem $x_1,\ldots x_n$ von $\mathfrak{m}_A$ gibt und Zahlen $m_1,\ldots m_n \in \mathbb{N}$ mit $\delta(x_i) = m_i x_i$ für alle i.

Sind in der obigen Definition alle $m_i > 0$, so nennt man δ eine homogene Derivation.

Der Begriff "semihomogen" soll hier nur als technischer Term verstanden werden, um die Situation kurz beschreiben zu können.

Das einfachste Beispiel einer semihomogenen Derivation ist einfach die Nullderivation. Im konvergenten Potenzreihenring $k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle$ ist für jedes $m \leq n$ die Derivation

$$\delta_m := \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial X_i}$$

eine semihomogene und δ_n sogar eine homogene.

(1.2) Sei A eine analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation. Dann gibt es für jedes $a \in A$ genau eine Darstellung $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$, wobei $a_i \in A$ und $\delta(a_i) = i a_i$ ist und die Summe $\mathfrak{m}_A$-adisch konvergiert.

Beweis: Zuerst zeigen wir die Existenz solch einer Darstellung. Seien $x_1,\ldots x_n$ wie in (1.1) gewählt. Sei $B := k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle$ ein konvergenter Potenzreihenring. Betrachten wir den surjek-

tiven k-Algebrahomomorphismus $\varphi: B \to A$ mit $\varphi(X_i) = x_i$ für alle i. $\tilde{\delta} := \sum_{i=1}^{n} m_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i}$ ist eine k-Derivation auf B, und

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & B \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ A & \xrightarrow{\delta} & A \end{array}$$

ist kommutativ.

Da φ surjektiv ist, gibt es ein $b \in B$ mit $\varphi(b) = a$. Die Potenzreihe b kann ich als $b = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu X^\nu$ mit $c_\nu \in k$ schreiben. Man bildet nun die auch konvergenten Potenzreihen

$$b_i := \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^n \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \nu_i = i}} c_\nu X^\nu \quad .$$

Dann gilt $\tilde{\delta}(b_i) = i b_i$. Wähle $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$, mit $l \geq m_i$ für alle i. Dann folgt aus $\sum_{i=1}^{n} m_i \nu_i = i$ die Ungleichung $l \cdot (\nu_1 + \ldots + \nu_n) \geq i$, also $(\nu_1 + \ldots + \nu_n) \geq [i/l]$. $[\,]$ bezeichne dabei die übliche Gaußklammer. Es gilt also $c_\nu X^\nu \in \mathfrak{m}_B^{[i/l]}$ und damit auch $b_i \in \mathfrak{m}_B^{[i/l]}$. Das heißt aber, daß die b_i eine $\mathfrak{m}_B$-adisch summierbare Folge sind und als Summe natürlich b ergeben: $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$. Da φ stetig ist, folgt $a = \varphi(b) = \sum_{i=0} \varphi(b_i)$. Und wegen des kommutativen Diagrammes oben ist $\delta(\varphi(b_i)) = i\varphi(b_i)$.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit der Darstellung. Dazu genügt es zu zeigen: Falls $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 0$ und $\delta(a_i) = i a_i$ für alle i ist, so ist $a_i = 0$ für alle i. Sei i_0 fest. Um $a_{i_0} = 0$ zu zeigen, genügt es, daß $a_{i_0} \in \mathfrak{m}_A^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei n_0 fest und $\bar{A} := A/\mathfrak{m}_A^{n}$. Da die Summe in der $\mathfrak{m}_A$-adischen Topologie konvergiert, gibt es ein n_1 mit $a_m \in \mathfrak{m}_A^{n_0}$ für alle $m > n_1$. O.B.d.A.

sei $n_1 > i_0$. In $\bar{A}$ hat man damit die Gleichung

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_n = 0 \quad ,$$

wobei das Überqueren die kanonische Projektion von A nach $\bar{A}$ bezeichne.

Aus (1.1) folgt sofort $\delta(\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{m}_A$ und daraus $\delta(\mathfrak{m}_A^n) \subseteq \mathfrak{m}_A^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher läßt sich δ auf $\bar{A}$ durchdrücken. Lasse ich δ mehrmals auf die obige Gleichung wirken, erhalte ich:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \ldots \quad \bar{a}_{n_1} &= 0 \\
0\,\bar{a}_0 + 1\,\bar{a}_1 + \ldots\, n_1\,\bar{a}_{n_1} &= 0 \\
0^2\bar{a}_0 + 1^2\bar{a}_1 + \ldots\, n_1{}^2\bar{a}_{n_1} &= 0 \\
0^{n_1}\bar{a}_0 + 1^{n_1}\bar{a}_1 + \ldots\, n_1{}^{n_1}\bar{a}_{n_1} &= 0
\end{aligned}$$

Die Determinante dieses linearen Gleichungssystemes ist eine Vandermondesche Determinante und ergibt $\prod_{0 \le i < j \le n} (i-j)$. Da k ein Körper der Charakteristik Null ist, ist dieses Element eine Einheit, also $\bar{a}_i = 0$ für alle $i \le n_1$. Da $i_0 < n_1$ ist, folgt also $a_{i_0} \in \mathfrak{m}_A^{n_0}$.

(1.3) Def: Sei A eine analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation auf A.

a) Sei $a \in A$ und $a \neq 0$ und $\delta(a) = ia$ mit $i \in \mathbb{N}$. Dann wollen wir a ein homogenes Element vom Grad i nennen, und wir schreiben auch kurz $i = \operatorname{grad}(a)$.

b) Sei $a \in A$ mit $a \neq 0$. Nach (1.2) gibt es eine $\mathfrak{m}_A$-adisch konvergente Summe $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$, wobei $a_i \in A$ homogene Elemente vom Grade i seien. Da $a \neq 0$ ist, gibt es ein n mit

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0 \text{ und } a_n \neq 0 \quad .$$

Wir nennen n den Untergrad von a und schreiben n=ugrad(a) . Wir setzen ugrad(0)= ∞.

(1.4) Sei A eine analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation auf A. Dann gilt:

1) Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} \text{ugrad}(a_n) = \infty$ konvergiert in der $\mathfrak{m}_A$-adischen Topologie.
2) Sei A ein Integritätsring und $a,b \in A\setminus\{0\}$. Es gilt: ugrad(ab) = ugrad(a) · ugrad(b) .

Beweis: 1) ersieht man aus dem Beweis zu (1.2) aus den Rechnungen mit $\mathfrak{m}_B^{[i/1]}$. 2) beweist man wie üblich.

(1.5) Def: Sei A eine analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation auf A.

a) Mit $\mathfrak{p}_+$ oder auch mit $\mathfrak{p}_{+A}$ wollen wir das Ideal in A bezeichnen, das von allen Eigenvektoren mit positivem Eigenwert erzeugt wird. Wir sehen in (1.6), daß $\mathfrak{p}_+$ ein Primideal ist, wenn A ein Integritätsring ist.
b) Wir setzen

$$A_0 := \{ a \in A \mid \delta(a) = 0 \} \quad .$$

Die Rechenregeln für k-Derivationen zeigen, daß A_0 eine k-Unteralgebra von A ist.

(1.6) Sei A eine analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation auf A. Dann gilt:

1) $A/\mathfrak{p}_+ \cong A_0$.
2) Ist A Integritätsring, so ist $\mathfrak{p}_+$ ein Primideal.
3) A_0 ist eine analytische k-Algebra.

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $\varphi: A \to A_0$, die ein $a \in A$ folgendermaßen abbildet: Schreibe $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ wie in (1.2) und setze $\varphi(a) := a_0$. Man sieht sofort: φ ist ein surjektiver k-Algebrahomomorphismus mit Kern $\varphi = \mathfrak{p}_+$. Aus dem Homomorphiesatz folgt jetzt 1). Falls A ein Integritätsring ist, so ist es A_0 als Unterring auch, und 1) zeigt, daß $\mathfrak{p}_+$ ein Primideal ist. 3) folgt auch sofort aus 1).

(1.7) Sei A eine analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation auf A. Seien $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}_A$ und $\delta(x_i) = m_i x_i$ mit $m_i \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\mathfrak{p}_+ = \sum_{m_i > 0} Ax_i \quad .$$

Beweis: Sei $a \in A$ ein Eigenvektor von δ mit positivem Eigenwert i. Seine Entwicklung nach (1.2) besteht dann nur aus $a = a_i$. Sieht man sich im Beweis von (1.2) an, wie b_i konstruiert wird, findet man, daß dort bei jedem Monom $c_\nu X^\nu$ ein j_0 mit $\nu_{j_0} \neq 0$ und $m_{j_0} > 0$ existieren muß. Also liegt $a_i = \varphi(b_i)$ in $\sum_{m_i > 0} Ax_i$.

_____ Seien A und B analytische k-Algebren und δ bzw. $\tilde{\delta}$ semihomogene Derivationen auf A bzw. B. Sei $\varphi: A \to B$ ein injektiver analytischer Homomorphismus, und sei das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\delta} & A \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ B & \xrightarrow[\tilde{\delta}]{} & B \end{array}$$

kommutativ. Dann gilt:

$$\mathfrak{p}_{+B} \cap A = \mathfrak{p}_{+A} \quad .$$

Beweis: Sei $a \in \mathcal{G}_{+A}$. O.B.d.A. sei a ein Eigenvektor mit positivem Eigenwert i. Dann gilt $\tilde{\delta}(\varphi(a)) = \varphi(\delta(a)) = \varphi(ia) = i\varphi(a)$, also $\varphi(a) \in \mathcal{G}_{+B}$.

Sei jetzt $a \in A$ mit $\varphi(a) \in \mathcal{G}_{+B}$. Zu zeigen ist $a \in \mathcal{G}_{+A}$. Wir schreiben $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ nach (1.2). Da φ lokal ist, folgt, daß $\varphi(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(a_i)$ eine $\mathfrak{m}_B$-adisch konvergente Summe ist, und man sieht wie oben, daß $\varphi(a_i)$ auch Eigenvektor zum Eigenwert i ist. Aus $\varphi(a) \in \mathcal{G}_{+B}$ folgt $\varphi(a_0) = 0$, und, weil φ injektiv ist, $a_0 = 0$ und daher $a \in \mathcal{G}_{+A}$.

(1.9) Def: Sei A eine analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation auf A. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq A$ soll homogen heißen, wenn es δ-invariant ist, wenn also $\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$ gilt.

(1.10) Sei A eine analytische k-Algebra, δ eine semihomogene Derivation auf A und $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein homogenes Ideal.

Dann gelten:

1) Auf $\bar{A} := A/\mathfrak{a}$ induziert δ eine Derivation $\bar{\delta}$ durch die Vorschrift $\bar{\delta}(\bar{a}) = \overline{\delta(a)}$ für alle $a \in A$.
2) $\bar{\delta}$ ist eine semihomogene Derivation auf $\bar{A}$.
3) $\mathcal{G}_{+\bar{A}} = \bar{A}\mathcal{G}_{+A}$.

Beweis: 1) ist bekanntes Rechnen mit Derivationen. Zu 2) und 3) wähle man ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathfrak{m}_A$ und $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ mit $\delta(x_i) = m_i x_i$ für alle i. Dann gilt, wenn Überqueren die kanonische Projektion von A auf $\bar{A}$ bezeichne: $\mathfrak{m}_{\bar{A}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ und $\bar{\delta}(\bar{x}_i) = m_i \bar{x}_i$. Also ist $\bar{\delta}$ semihomogen. Mit (1.7) folgt: $\mathcal{G}_{+\bar{A}} = \sum_{m_i > 0} \bar{A}\bar{x}_i = \bar{A}\left(\sum_{m_i > 0} Ax_i \right) = \bar{A}\mathcal{G}_{+A}$.

(1.11) Sei A eine analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation auf A. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann sind äquivalent:

1) $\mathfrak{a}$ ist ein homogenes Ideal.

2) Ist $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ eine Zerlegung nach (1.2) und $a \in \mathfrak{a}$, so folgt $a_i \in \mathfrak{a}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

3) $\mathfrak{a}$ hat ein Erzeugendensystem aus homogenen Elementen.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2): Im Ring $\bar{A} := A/\mathfrak{a}$ gilt $\sum_{i=0} \bar{a}_i = 0$. Nach (1.2) folgt $\bar{a}_i = 0$, also $a_i \in \mathfrak{a}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

2) $\Rightarrow$ 3): Sei $\mathfrak{a} = Aa^{(1)} + \ldots + Aa^{(n)}$. Zerlege alle $a^{(i)}$ nach (1.2), und sei $\tilde{\mathfrak{a}}$ das von diesen homogenen Elementen erzeugte Ideal. Aus 2) folgt $\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}$. Da $\tilde{\mathfrak{a}}$ wie jedes Ideal $\mathfrak{m}_A$-adisch abgeschlossen ist, folgt $a^{(i)} \in \tilde{\mathfrak{a}}$ für alle i, also $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}}$.

3) $\Rightarrow$ 1): Es ist für alle $a \in \mathfrak{a}$ zu zeigen: $\delta(a) \in \mathfrak{a}$. Wegen der Produktregel genügt es, dies auf einem Erzeugendensystem zu testen. Für homogene Erzeugende ist die Sache aber trivial.

(1.12) Def: a) A heißt semihomogene k-Algebra der Kodimension n, wenn A eine analytische k-Algebra ist und auf A fest eine semihomogene Derivation gegeben ist mit $\operatorname{codim} \mathfrak{y}_+ = n$.

heißt homogene k-Algebra, wenn A eine analytische k-Algebra ist und auf A eine homogene Derivation existiert.

Man beachte, daß semihomogene k-Algebren irgendeiner Kodimension hier stets analytische k-Algebren sind. Mittels der Nullderivation kann man jede analytische k-Algebra zu einer semihomogenen k-Algebra der Kodimension 0 machen.

(1.13) Sei A eine semihomogene k-Algebra der Kodimension n und A ein Integritätsring der Dimension d. Dann gilt:
1) Ist n=0 , so ist die Derivation auf A die Nullderivation.
2) Ist n=d , so ist A homogen.
Beweis: 1) n=0 heißt $\mathfrak{g}_+ = 0$, und (1.7) zeigt, daß die Derivation auf einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}_A$ nur die Werte 0 annimmt, also die Nullderivation ist.
2) n=d heißt $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{m}_A$, und (1.7) zeigt, daß die Derivation auf einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}_A$ nur positive Werte annimmt. Also ist sie homogen.

Da wir im Folgenden stets dreidimensionale Integritätsringe betrachten, interessieren als "echte" semihomogene Fälle nur die Fälle der Kodimension 1 und 2 . Der Fall der Kodimension 1 wird in §2 und §3 behandelt. Die Kodimension 2 in §4 und §5.

Sei A eine analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation auf A. Dann ist für $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, auch stets die Derivation $m\delta$ semihomogen mit demselben Ideal $\mathfrak{g}_+$ und demselben Unterring A_0 . Dies führt zu der folgenden Begriffsbildung:
(1.14) Def: Sei A eine analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation auf A. Wir nennen δ normiert, wenn folgendes gilt: Für jedes $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, ist $\frac{1}{m}\delta$ keine semihomogene Derivation auf A mehr.

Man sieht sofort: Jede semihomogene Derivation δ kann man als $m\delta_0$ schreiben mit $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und δ_0 normiert.

(1.15) Sei A eine analytische k-Algebra und A ein Integritätsring. Sei δ eine k-Derivation auf A. Seien die Elemente $x_1,\ldots,x_n$ ein Parametersystem von A mit $\delta(x_i) = 0$ für alle i. Dann ist δ die Nullderivation.

Beweis: Der k-Algebrahomomorphismus $\varphi: k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle \to A$ mit $\varphi(X_i) = x_i$ ist injektiv und endlich. Ferner ist der Ring $k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle$ normal. Sei $a \in A$. Es gibt eine minimale Ganzheitsgleichung

$$a^m + b_{m-1}a^{m-1} + \ldots + b_0 = 0$$

mit $b_i \in k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle$. Da $\delta(b_i) = 0$ für alle i ist, folgt

$$ma^{m-1}\delta(a) + (m-1)b_{m-1}a^{m-2}\delta(a) + \ldots + b_1\delta(a) = 0 .$$

Also ist

$$\delta(a)\left[a^{m-1} + \frac{m-1}{m}b_{m-1}a^{m-2} + \ldots + \frac{1}{m}b_1\right] = 0 .$$

Wegen der Minimalität der Ganzheitsgleichung ist der Ausdruck in den eckigen Klammern ungleich Null. Weil A ein Integritätsring ist, folgt $\delta(a) = 0$.

(1.16) Sei A eine analytische k-Algebra und A ein Integritätsring. Sei δ eine semihomogene Derivation auf A und A' die Normalisierung von A. Dann ist A' eine semihomogene k-Algebra unter der Fortsetzung von δ.

Beweis: Man kann wörtlich den Beweis von [Sch-W3] (2.1) übertragen, wenn man nur den Teil wegläßt, der dort die Eigenwerte Null ausschließt.

(1.17) Sei A eine homogene k-Algebra. Dann besitzt A ein

Parametersystem aus homogenen Elementen.

Beweis: Sei $\mathfrak{A} = (x_1,\ldots,x_n)$ mit homogenen Elementen x_i von positivem Grad. Man kann positive $m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N}$ finden, so daß alle Elemente $x_i^{m_i}$ denselben Grad haben. Nach [G-R] II §4 Satz 11 sind passende Linearkombinationen dieser $x_i^{m_i}$ mit Koeffizienten aus k ein Parametersystem. Diese Linearkombinationen sind nun aber auch homogen.

Für semihomogene k-Algebren gilt kein analoger Satz, wie man zum Beispiel aus Satz (3.9) sieht.

§2 Die dreidimensionalen jungschen Ringe

Wir betrachten in diesem Kapitel eine Klasse von semihomogenen k-Algebren der Kodimension 1, die wir die dreidimensionalen jungschen Ringe nennen werden. Sie werden sich alle als normale, dreidimensionale, fastfaktorielle, isolierte Singularitäten erweisen. Im §3 zeigen wir umgekehrt, daß jede semihomogene k-Algebra der Kodimension 1 mit diesen vier Eigenschaften schon ein dreidimensionaler jungscher Ring ist.

(2.1) Def: Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$ und $0 \leq b < m$. Sei $\eta \in k$ eine primitive m-te Einheitswurzel. Auf dem konvergenten Potenzreihenring $B := k\langle X_0, X_1, X_2 \rangle$ betrachten wir den k-Algebraautomorphismus φ, definiert durch:

$$\varphi(X_0) = \eta X_0$$
$$\varphi(X_1) = \eta^a X_1$$
$$\varphi(X_2) = \eta^b X_2 \quad .$$

Sei $G = \{id, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{m-1}\}$ die von φ in $\mathrm{Aut}_k B$ erzeugte Untergruppe. Wir betrachten nun den Fixring B^G dieser Operation und setzen

$$\Delta_{m,a,b} := B^G \quad .$$

Unter einem normalen Ring wollen wir einen Integritätsring verstehen, der in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist.

(2.2) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$ und $0 \leq b < m$. Dann ist $A_{m,a,b}$ ein normaler Ring.

Beweis: Wir übernehmen die Bezeichnungen aus (2.1). Da B Integritätsring und $A_{m,a,b}$ ein Unterring $\neq 0$ ist, ist $A_{m,a,b}$ ein Integritätsring. Sei $\frac{c}{d} \in \mathrm{Quot}(A_{m,a,b})$ mit $c,d \in A_{m,a,b}$, $d \neq 0$, ein über $A_{m,a,b}$ ganzes Element. Dann ist $\frac{c}{d}$ ganz über B , und da dieser Ring normal ist, gibt es ein $r \in B$ mit $c = rd$. Indem wir die Elemente aus G auf diese Gleichung anwenden, sehen wir $r \in B^G$.
Also gilt $\frac{c}{d} = r \in A = B^G$.

(2.3) Hilfssatz: Wir übernehmen die Bezeichnungen von (2.1). Dann gelten:

1) $A_{m,a,b}$ ist eine analytische k-Algebra.
2) $A_{m,a,b} \subseteq B$ ist eine endliche Erweiterung.
3) $A_{m,a,b}$ ist ein dreidimensionaler Ring.

Beweis: Siehe [G-R] III §3 Satz 1 und Satz 3.

Bevor wir den Begriff fastfaktoriell definieren können, brauchen wir einige Vorbereitungen. Sei $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal in einem Ring A und $n \in \mathbb{N}$, so soll $\mathfrak{p}^{(n)} := \mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}} \cap A$ die n-te symbolische Potenz von $\mathfrak{p}$ bedeuten. $\mathfrak{p}^{(0)} := A$.

(2.4) Hilfssatz: Sei A ein normaler noetherscher Ring. Dann gelten:

1) für jedes $a \in A$, $a \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Primideale $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r$ der Kodimension 1 und Zahlen $n_1,\ldots,n_r$

aus $\mathbb{N}$, alle ungleich Null, so daß

$$Aa = \mathfrak{p}_1^{(n_1)} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r^{(n_r)}$$

die Primärzerlegung des Ideals Aa ist. Es gilt dabei:

$$(*) \qquad A_{\mathfrak{p}_i} a = (\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i})^{n_i}$$

2) Seien $a,b \in A$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r$ Primideale der Kodimension 1 und $n_1,\ldots,n_r$, $m_1,\ldots,m_r \in \mathbb{N}$ mit

$$Aa = \mathfrak{p}_1^{(n_1)} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r^{(n_r)}$$
$$Ab = \mathfrak{p}_1^{(m_1)} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r^{(m_r)} .$$

Dann gilt:

$$Aab = \mathfrak{p}_1^{(n_1+m_1)} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r^{(n_r+m_r)}$$

und

$$a \text{ teilt } b \iff n_i \leq m_i \text{ für alle } i .$$

Beweis: Zu 1). In einem normalen Ring ist das Hauptideal $Aa \neq 0$ ungemischt. Also haben alle assoziierten Primideale die Kodimension 1. Sei $Aa = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$, wobei $\mathfrak{q}_i$ ein $\mathfrak{p}_i$ - primäres Ideal ist, die Primärzerlegung von Aa. Für ein primäres Ideal gilt aber $\mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i} \cap A = \mathfrak{q}_i$. In einem normalen Ring ist aber $A_{\mathfrak{p}_i}$ ein diskreter Bewertungsring, in dem das $\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i}$ - primäre Ideal $\mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i}$ die Form $\mathfrak{p}_i^{n} A_{\mathfrak{p}_i}$ mit $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i > 0$, hat. Also $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i} \cap A = \mathfrak{p}_i^{n} A_{\mathfrak{p}_i} \cap A = \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$. Das beweist übrigens auch die Gleichung (*), da $A_{\mathfrak{p}_i}(Aa) = \mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i}$.

Zu 2). Die Formel für das Produkt folgt sofort aus (*). Die zweite Behauptung erhalten wir folgendermaßen: Es ist klar, daß a genau b teilt, wenn $Aa \supseteq Ab$ ist. Aus $Aa \supsetneq Ab$ folgt aber mit

Hilfe von (*) sofort $n_i \leq m_i$ für alle i. Die Umkehrung ist trivial.

Sei A ein normaler noetherscher Ring. Wir bilden die von allen Primidealen der Kodimension 1 erzeugte freie abelsche Gruppe und nennen sie D(A), die Divisorengruppe von A. Nach (2.4) ergibt die Vorschrift $a \mapsto \sum_{i=1}^{r} n_i \mathfrak{p}_i$ einen Monoidhomomorphismus von A^* nach D(A), der sich zu einem Gruppenhomomorphismus von K^* nach D(A) fortsetzen läßt, wobei K der Quotientenkörper von A ist. Das Bild dieses Gruppenhomomorphismus nennen wir F(A), die Gruppe der Hauptdivisoren. Die Gruppe

$$Cl(A) := D(A) / F(A)$$

heißt die Divisorenklassengruppe von A.

Nun heißt A fastfaktoriell, wenn Cl(A) eine Torsionsgruppe ist, wenn also für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A der Kodimension 1 ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, und $a \in A$ mit $Aa = \mathfrak{p}^{(n)}$ existieren.

(2.5) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$ und $0 \leq b < m$. Dann ist $A_{m,a,b}$ ein fastfaktorieller Ring, und jedes Element der Gruppe $Cl(A_{m,a,b})$ hat höchstens die Ordnung m.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen von (2.1). Sei $K := Quot(A_{m,a,b})$ und $L := Quot(B)$. Da nach (2.3) $A_{m,a,b} \subseteq B$ endlich und B als faktorieller Ring auch fastfaktoriell ist, folgt, daß $A_{m,a,b}$ fastfaktoriell ist aus [St] §3 Satz 1. Dort steht auch, daß die Ordnungen der Elemente von $Cl(A_{m,a,b})$ durch den Grad $[L:K]$ begrenzt sind, denn Cl(B) = 0. Wir behaupten nun $[L:K] \leq m$. Wegen $X_0^m \in A_{m,a,b}$ ist X_0 algebraisch über K vom Grad $\leq m$, also ist $K[X_0]$ ein Körper mit $[K[X_0]: K] \leq m$.

Wir brauchen nur noch $L = K[X_0]$ zu zeigen. Weil $X_0^{m-a}X_1$ und $X_0^{m-b}X_2$ in $A_{m,a,b}$ sind, folgt $X_1, X_2 \in K[X_0]$.

Nun wollen wir unsere Algebren zu semihomogenen machen und definieren uns dazu zuerst einmal eine Derivation:

(2.6) Def: Die Bezeichnungen seien wie in (2.1). Wir definieren auf B die folgende Derivation

$$\delta := X_0 \frac{\partial}{\partial X_0} \quad ,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial X_0}$ das partielle Ableiten nach der Unbestimmten X_0 sei. Man sieht sofort die Gleichung $\delta g = g\delta$ für alle $g \in G$. Also läßt sich δ auf $A_{m,a,b} = B^G$ beschränken. Ab jetzt sei $A_{m,a,b}$ fest mit dieser Derivation versehen.

(2.7) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$ und $0 \leq b < m$. Dann ist $A_{m,a,b}$ eine semihomogene k-Algebra der Kodimension 1.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen aus (2.1). Aus (2.3) 1) folgt, daß $A_{m,a,b}$ eine analytische k-Algebra ist. Nach [G-R] III §3 Satz 3 kann ich ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}_{A_{m,a,b}}$ finden, das aus Monomen $X_0^{i}X_1^{j}X_2^{l}$ besteht. Diese sind aber für unsere [illegible]ation Eigenvektoren zum Eigenwert i. Also ist $A_{m,a,b}$ semihomogen. Nach (1.8) ist $\mathcal{P}_{+A_{m,a,b}} = \mathcal{P}_{+B} \cap A_{m,a,b} = (X_0) \cap A_{m,a,b}$ Da codim $(X_0) = 1$ ist, folgt mit [Mat] (13.C) der Rest der Behauptung.

Zum Schluß kommen wir zum Begriff der isolierten Singularität. Wir verwenden diesen Begriff nur für lokale Ringe und de-

finieren, daß ein lokaler Ring A eine isolierte Singularität ist, wenn für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$ mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}_A$ $A_{\mathfrak{p}}$ ein regulärer Ring ist. Wir benötigen einige Hilfssätze.

(2.8) Sei $A \subseteq B$ eine endliche Erweiterung lokaler, normaler Ringe. Sei codim $(\mathrm{Vzw}_A{}^B) \geq 2$ und A eine isolierte Singularität. Dann gelten:

1) B ist eine isolierte Singularität.

2) $\mathrm{Vzw}_A{}^B \subseteq \{\mathfrak{m}_B\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spek}(B)$ mit $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{m}_B$ und $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$. Weil $A \subseteq B$ endlich ist, folgt $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}_A$. Also ist $A_{\mathfrak{p}}$ regulär, weil A eine isolierte Singularität ist. Wir betrachten jetzt die endliche Erweiterung $A_{\mathfrak{p}} \subseteq B_{\mathfrak{p}}$.

Wir behaupten, daß diese Erweiterung unverzweigt ist. Da $A \subseteq B$ endlich ist, ist $\mathrm{Vzw}_A{}^B$ eine abgeschlossene Menge im Spektrum, sagen wir $\mathrm{Vzw}_A{}^B = \mathbb{V}(\mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal und codim $\mathfrak{b} \geq 2$. Da $\mathrm{Vzw}_{A_{\mathfrak{p}}}{}^{B_{\mathfrak{p}}} = \mathbb{V}(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})$ ist $A_{\mathfrak{p}} \subseteq B_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt, wenn $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}$ ist. Bei $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \neq B_{\mathfrak{p}}$ gilt codim $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \geq$ codim $\mathfrak{b} \geq 2$. Ferner ist $A_{\mathfrak{p}}$ ein regulärer, lokaler Ring und $B_{\mathfrak{p}}$ ein endlicher, normaler Erweiterungsring. Nach einer Version des Satzes von der Reinheit des Verzweigungsortes [Sch-St] (23.5) ist $A_{\mathfrak{p}} \subseteq B_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt. Damit ist auch 2) schon gezeigt.

Sei $\tilde{\mathfrak{P}} := \mathfrak{P} B_{\mathfrak{p}}$. Dann ist $\tilde{\mathfrak{P}}$ ein Primideal in B , das auf $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ zurückschneidet. Nach [Sch-St] (3.3) folgt

$$(*) \qquad (\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}})\,(B_{\mathfrak{p}})_{\tilde{\mathfrak{P}}} = \tilde{\mathfrak{P}}(B_{\mathfrak{p}})_{\tilde{\mathfrak{P}}} \quad .$$

Sei d nun die Dimension des regulären Ringes $A_{\mathfrak{p}}$. Dann ist wegen $A_{\mathfrak{p}} \subseteq B_{\mathfrak{p}}$ endlich, dim $(B_{\mathfrak{p}})_{\tilde{\mathfrak{P}}} = d$ nach [Mat] (13.C) .

Die Gleichung (*) zeigt: $\tilde{\mathfrak{p}}(B_{\mathfrak{y}})_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ hat auch ein Erzeugendensystem aus d Elementen, also ist $(B_{\mathfrak{y}})_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ regulär. Wegen der Transitivität der Nenneraufnahme ist dieser Ring aber isomorph zu $B_{\mathfrak{p}}$.

(2.9) Sei $A \subseteq B$ eine endliche Erweiterung lokaler, normaler Ringe. Sei $\mathrm{Vzw}_A^B \subseteq \{\mathfrak{m}_B\}$ und B eine isolierte Singularität. Dann ist auch A eine isolierte Singularität.

Beweis: Sei $\mathfrak{y} \in \mathrm{Spek}(A)$ mit $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{m}_A$. Wir haben $A_{\mathfrak{y}}$ als regulären Ring zu erweisen. Da $A \subseteq B$ endlich ist, gibt es ein $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spek}(B)$ mit $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{y}$. Da bei einer endlichen Erweiterung maximale Ideale auf maximale Ideale zurückgeschnitten werden, ist $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{m}_B$, also $B_{\mathfrak{P}}$ regulär. Nach [Mat] (15.C) folgt $d := \dim A_{\mathfrak{y}} = \dim B_{\mathfrak{P}}$. Wir betrachten nun die endliche Erweiterung $A_{\mathfrak{y}} \subseteq B_{\mathfrak{y}}$. Da $\mathrm{Vzw}_A^B \subseteq \{\mathfrak{m}_B\}$, ist $A_{\mathfrak{y}} \subseteq B_{\mathfrak{y}}$ unverzweigt. Da $A_{\mathfrak{y}}$ und $B_{\mathfrak{y}}$ beides normale Ringe sind, folgt mit [Sch-St] (12.7) , daß $B_{\mathfrak{y}}$ ein projektiver $A_{\mathfrak{y}}$-Modul ist, speziell ein flacher $A_{\mathfrak{y}}$-Modul ist. Da der Übergang von $B_{\mathfrak{y}}$ zu $B_{\mathfrak{P}}$ nur eine Nenneraufnahme ist, ist auch $A_{\mathfrak{y}} \subseteq B_{\mathfrak{P}}$ flach. Da über dem maximalen Ideal von $A_{\mathfrak{y}}$ das maximale Ideal von $B_{\mathfrak{P}}$ liegt, ist $A_{\mathfrak{y}} \subseteq B_{\mathfrak{P}}$ treuflach. Weil $A \subseteq B$ in $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{m}_B$ unverzweigt ist, folgt nach [Sch-St] (3.3) $\mathfrak{y}B_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}B_{\mathfrak{P}}$. Da $B_{\mathfrak{P}}$ regulär von der Dimension d ist, wird $\mathfrak{P}B_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{y}B_{\mathfrak{P}}$ von d Elementen minimal erzeugt. Mit (2.10) wird $\mathfrak{y}A_{\mathfrak{y}}$ von d Elementen minimal erzeugt. Also ist $A_{\mathfrak{y}}$ regulär, da $\dim A_{\mathfrak{y}} = d$ ist.

(2.10) Hilfssatz: Sei $A \subseteq B$ treuflache Erweiterung lokaler Ringe und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann haben $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}B$ dieselbe mini-

male Erzeugendenzahl.

Beweis: Natürlich hat $\mathfrak{a}B$ höchstens weniger Erzeugende. Sei d die minimale Anzahl von Erzeugenden von $\mathfrak{a}B$. Wähle $a_1,\ldots,a_n$ die $\mathfrak{a}$ über A erzeugen. Dann erzeugen sie auch $\mathfrak{a}B$ über B , und weil B ein lokaler Ring ist, kann ich unter ihnen d Stück, sagen wir $a_1,\ldots,a_d$ auswählen, die auch schon $\mathfrak{a}B$ erzeugen. Sei $\mathfrak{a}' := Aa_1 + \ldots + Aa_d$. Weil $A \subseteq B$ treuflach ist, gilt $\tilde{\mathfrak{a}}B \cap A = \tilde{\mathfrak{a}}$ für alle Ideale $\tilde{\mathfrak{a}}$ in A nach [Mat] (4.B). Damit ist $\mathfrak{a}'B \cap A = \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}B \cap A = \mathfrak{a}$.

(2.11) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$ und $0 \leq b < m$. Sei $n := ggT(m,a,b)$. Dann gilt:

$$A_{m,a,b} = A_{\frac{m}{n},\frac{a}{n},\frac{b}{n}}$$

Beweis: Wir übernehmen die Bezeichnungen aus (2.1). Sei $\tilde{X}_0 := X_0^n$ und $\tilde{B} := k\langle \tilde{X}_0, X_1, X_2 \rangle$. $\tilde{B}$ ist auch wieder ein konvergenter Potenzreihenring. Es gilt:

$$\varphi(\tilde{X}_0) = \eta^n \tilde{X}_0$$

$$\varphi(X_1) = (\eta^n)^{a/n} X_1$$

$$\varphi(X_2) = (\eta^n)^{b/n} X_2 \quad .$$

Man sieht, daß man $\tilde{\varphi} := \varphi/B$ bilden kann. Sei $\tilde{G} := \{id, \tilde{\varphi}, \ldots, \tilde{\varphi}^{\frac{m}{n}}\}$. Nun ist $A_{m,a,b} = B^G = \tilde{B}^{\tilde{G}}$ und η^n ist eine $\frac{m}{n}$-te primitive Einheitswurzel.

Wegen dieses Satzes werden wir ab jetzt stets die zusätzliche Annahme $ggT(m,a,b) = 1$ machen.

(2.12) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$ und $0 \leq b < m$ und $ggT(m,a,b) = 1$. Seien $A_{m,a,b}$ und B wie in (2.1). Dann gelten:

1) $\operatorname{codim} \operatorname{Vzw}_{A_{m,a,b}}{}^{B} \geq 2$.

2) Gilt zusätzlich $ggT(m,a) = 1$ und $ggT(m,b) = 1$, so gilt:

$$\operatorname{Vzw}_{A_{m,a,b}}{}^{B} \subseteq \{\mu_B\}$$

Beweis: Da im Falle m=1 wegen $A_{1,0,0} = B$ alles trivial ist, sei $m > 1$. Wir schreiben kurz $A := A_{m,a,b}$. Da $\operatorname{Vzw}_A{}^B = \operatorname{Tr}(D_A(B)) = V(\mathfrak{f}_0(D_A(B))) = V(\alpha)$ mit $\alpha := \sqrt{\mathfrak{f}_0(D_A(B))}$ nach [Sch-St] (2.1), wobei $\mathfrak{f}_0$ das 0-te Fittingideal bezeichnet, gilt es den relativen Differentialmodul zu berechnen. Wir verwenden zur Berechnung die Formel $D_A(B) = D_k(B)/BdA$, die uns zu der folgenden exakten Sequenz führt:

$$\sum_{f \in A} B\left(\frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2}\right) \subseteq B^3 \cong D_k(B) \longrightarrow D_A(B) \longrightarrow 0$$

Dabei führt die Isomorphie $B^3 \cong D_k(B)$ ein $(b_0,b_1,b_2) \in B^3$ in $b_0dX_0 + b_1dX_1 + b_2dX_2 \in D_k(B)$ über. Diese Sequenz können wir sofort zum Berechnen des Fittingideals benutzen. Wir brauchen nur 3 Vektoren aus der linken Menge zu nehmen und die Determinante zu bilden.

Aus $X_0{}^m$, $X_0{}^{m-a}X_1$, $X_0{}^{m-b}X_2 \in A$ bekommen wir die 3 Vektoren:

$$\left(\quad mX_0{}^{m-1} \quad , \quad 0 \quad , \quad 0 \quad \right)$$

$$\left(\quad (m-a)X_0{}^{m-a-1}X_1 \quad , \quad X_0{}^{m-a} \quad , \quad 0 \quad \right)$$

$$\left(\quad (m-b)X_0{}^{m-b-1}X_2 \quad , \quad 0 \quad , \quad X_0{}^{m-b} \quad \right)$$

Es folgt $X_0 \in \mathfrak{a}$, da char(k) = 0 .

Weil ggT(m,a,b) = 1 gibt es eine Darstellung -1 = ra+sb+lm mit $r,s,l \in \mathbb{Z}$. Man kann o.B.d.A. $r \geq 0$ und $s \geq 0$ annehmen. Dann ist $X_0 X_1^r X_2^s \in A$, und mit den Elementen X_1^m , $X_2^m \in A$ zusammen ergeben sich die drei Vektoren:

$$(\; X_1^r X_2^s \; , \; rX_0 X_1^{r-1} X_2^s \; , \; sX_0 X_1^r X_2^{s-1} \;)$$

$$(\; 0 \; , \; mX_1^{m-1} \; , \; 0 \;)$$

$$(\; 0 \; , \; 0 \; , \; mX_2^{m-1} \;)$$

Es folgt $X_1 X_2 \in \mathfrak{a}$. Damit ist X_0 , $X_1 X_2 \in \mathfrak{a}$ und es folgt codim Vzw_A^B = codim $V(\mathfrak{a})$ = codim $\mathfrak{a} \geq 2$.

Sei nun ggT(m,a) = 1 und ggT(m,b) = 1 . Dann sind a und b im Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ Einheiten, und es gibt $c \geq 0$, $d \geq 0$ mit $-1 \equiv ca \bmod m$ und $-b \equiv da \bmod m$. Dann sind $X_0 X_1^c$ und $X_1^d X_2$ in A. Zusammen mit $X_1^m \in A$ bekommen wir:

$$(\; X_1^c \; , \; cX_0 X_1^{c-1} \; , \; 0 \;)$$

$$(\; 0 \; , \; mX_1^{m-1} \; , \; 0 \;)$$

$$(\; 0 \; , \; dX_1^{d-1} X_2 \; , \; X_1^d \;)$$

Dies liefert $X_1 \in \mathfrak{a}$. Eine analoge Überlegung zeigt $X_2 \in \mathfrak{a}$. Dann ist $\mathrm{Vzw}_A^B = V(\mathfrak{a}) \subseteq V((X_0,X_1,X_2)B) = \{\mathfrak{m}_B\}$.

(2.13) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$ und $0 \leq b < m$ und ggT(m,a,b) = 1 . Dann sind äquivalent:

1) $A_{m,a,b}$ ist eine isolierte Singularität.

2) ggT(m,a) = 1 und ggT(m,b) = 1 .

Beweis: Wir übernehmen die Bezeichnungen aus (2.1) und setzen $A := A_{m,a,b}$.

2) $\Rightarrow$ 1): Aus (2.12)2) folgt $\mathrm{Vzw}_A{}^B \subseteq \{\mathfrak{m}_B\}$, und (2.9) liefert die Behauptung.

1) $\Leftarrow$ 2): Sei o.B.d.A. $p := \mathrm{ggT}(m,b) \neq 1$. Schreibe $m=pq$ mit $q \in \mathbb{N}$. Sei $\psi := \varphi^q$, $\tilde{G} := \{\mathrm{id}, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{p-1}\}$ und $R := B^G$. Man hat $A \subseteq R \subseteq B$, und es gilt:

$$\psi(X_0) = \eta^q X_0$$

$$\psi(X_1) = \eta^{qa} X_1$$

$$\psi(X_2) = \eta^{qb} X_2 = X_2$$

η^q ist nun eine p-te primitive Einheitswurzel. Wähle $0 \leq \tilde{a} < p$ mit $\tilde{a} \equiv a \bmod p$. Dann ist $R \cong A_{p,\tilde{a},0}$. Es ist $\tilde{a} \neq 0$, weil sonst $\mathrm{ggT}(m,a,b) \neq 1$ wäre. Nach (2.14) ist R keine isolierte Singularität.

Sei nun A eine isolierte Singularität. Nach (2.8)2) ist $\mathrm{Vzw}_A{}^B \subseteq \{\mathfrak{m}_B\}$, also $\mathrm{Tr}(D_A(B)) \subseteq \{\mathfrak{m}_B\}$. Da $D_R(B) = D_\lambda(B)/BdR$ ist, folgt $\mathrm{Tr}(D_R(B)) \subseteq \{\mathfrak{m}_B\}$, also $\mathrm{Vzw}_R{}^B \subseteq \{\mathfrak{m}_B\}$. Nach (2.9) wäre R dann eine isolierte Singularität. Widerspruch !

(2.14) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $a \in \mathbb{N}$, $0 < a < m$. Dann ist $A_{m,a,0}$ keine isolierte Singularität.

Beweis: Sei $C := k\langle X_0, X_1\rangle$ und $\psi \in \mathrm{Aut}_k C$ definiert durch:

$$\psi(X_0) = \eta X_0$$

$$\psi(X_1) = \eta^a X_1$$

Sei weiter $G := \{\mathrm{id}, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{m-1}\}$ und $\tilde{A} := C^{\tilde{G}}$. Dann hat

man

$$A_{m,a,0} = \tilde{A} \hat{\otimes} k\langle X_2 \rangle \quad .$$

und es genügt zu zeigen: $\tilde{A}$ ist singulär.

Mit den Methoden von (2.3) sieht man sofort dim $\tilde{A} = 2$. Die Elemente X_0^m, $X_0^{m-a}X_1$ sind in $\mathfrak{m}_{\tilde{A}}$. Wir zeigen gleich, daß ihre Bilder in $\mathfrak{m}_{\tilde{A}}/\mathfrak{m}_{\tilde{A}}^2$ über dem Körper $\tilde{A}/\mathfrak{m}_{\tilde{A}}$ linear unabhängig sind. Dann kann man sie zu einem minimalen Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}_{\tilde{A}}$ auffüllen. Wäre $\tilde{A}$ regulär, so würden in einem minimalen Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}_{\tilde{A}}$ nur 2 Elemente gebraucht. In diesem Fall wären also X_0^m , $X_0^{m-a}X_1$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}_{\tilde{A}}$, speziell ein Parametersystem in $\tilde{A}$. Da $\tilde{A} \subseteq C$ endlich ist, wären X_0^m , $X_0^{m-a}X_1$ auch ein Parametersystem in $C = k\langle X_0, X_1 \rangle$. Dies geht aber wegen des gemeinsamen Faktors X_0 nicht. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\tilde{A}$ singulär ist.

Nun zum Beweis der linearen Unabhängigkeit. Man sieht, daß man nur zu zeigen braucht: Seien $f,g \in \tilde{A}$ mit

$$(*) \qquad f X_0^m + g X_0^{m-a}X_1 \in \mathfrak{m}_{\tilde{A}}^2$$

dann sind f und g in $\mathfrak{m}_{\tilde{A}}$. Dazu betrachte ich auf C die Derivation

$$\tilde{\delta} := X_0 \frac{\partial}{\partial X_0} + a X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \quad .$$

Sie macht C zu einer homogenen k-Algebra, und mit den durch sie definierten homogenen Elementen wollen wir rechnen. Man sieht sofort, daß ein Monom aus C genau dann zu $\tilde{A}$ gehört, wenn es bezüglich $\tilde{\delta}$ einen Grad hat, der ein Vielfaches von m ist. Da $\mathfrak{m}_{\tilde{A}}$ nach [G-R] III §3 Satz 3 von solchen Monomen erzeugt wird, haben also alle Elemente von $\mathfrak{m}_{\tilde{A}}$ den Untergrad $\geq m$.

Also haben alle Elemente von $\mathfrak{m}_A^2$ den Untergrad $\geq 2m$. Wir zerlegen nun f und g, die ja auch in C liegen, nach (1.2):

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \qquad \text{und} \qquad g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i$$

Weil C unter δ homogen ist, sind $f_0, g_0 \in k$ einfach die Anfangsterme der Potenzreihen f und g. Wir sehen uns jetzt in der Gleichung (*) die m-te homogene Komponente an und erhalten $f_0 X_0^m + g_0 X_0^{m-a} X_1 = 0$. Daraus folgt $f_0 = g_0 = 0$, und damit sind f,g in C keine Einheiten, also erst recht nicht in A, also gilt $f, g \in \mathfrak{m}_A$.

Wir wollen hier noch kurz einen Beweis von (2.13) mit geometrischen Hilfsmitteln, nämlich der Theorie der komplexen Räume, skizzieren. Um jedoch die Methoden der komplexen Räume verwenden zu können, müssen wir uns auf den Fall $k = \mathbb{C}$ beschränken.

Zu jedem komplexen Raum Y gehört sein singulärer Ort:

$$\mathrm{Sing}(Y) := \{ y \in Y \mid \mathcal{O}_{Y,y} \text{ singulärer Ring} \}$$

Nach dem Korrespondenzprinzip [Sch] III §3 ist für ein $y \in Y$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{Y,y}$ genau dann eine isolierte Singularität im Sinne unserer Definition, wenn $y \notin \mathrm{Sing}(Y)$ ist oder Sing(Y) in y einen isolierten Punkt hat.

Wir betrachten die biholomorphe Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \quad (t_0, t_1, t_2) \mapsto (\eta t_0, \eta^a t_1, \eta^b t_2) \quad .$$

Sei G die von φ in Aut $\mathbb{C}^3$ erzeugte Gruppe. Nach [Car] §3 kann ich den Quotientenraum $X := \mathbb{C}^3/G$ bilden. Sei $\pi : \mathbb{C}^3 \to X$

die kanonische Projektion. Dabei berechnen sich die Halme folgendermaßen: Sei $x \in \mathbb{C}^3$. Man bilde die Gruppe $I(x) := \{\varphi \in G \mid \varphi(x) = x\} \subseteq G$. Jedes $\varphi \in I(x)$ induziert ein $\varphi_x : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,x}$. Sei $I_x(x)$ die von diesen $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismen gebildete Gruppe. Dann ist

$$\mathcal{O}_{X,\,(x)} = \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,x}\right)^{I_x(x)} .$$

Damit erhält man nun zuerst die Isomorphie $\mathcal{O}_{X,\pi(0)} \cong A_{m,a,b}$, wobei 0 den Nullpunkt $(0,0,0) \in \mathbb{C}^3$ bezeichne. Wir betrachten die Menge

$Z := \{x \in \mathbb{C}^3 \mid$ Die Bahn von x unter G hat genau m Elemente $\}$.

Für jedes $x \in Z$ ist dann

$$\mathcal{O}_{X,\pi(x)} = \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,x}\right)^{\{id\}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,x}$$

ein regulärer Ring. Also gilt:

$$\pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X)) \subseteq \mathbb{C}^3 \setminus Z .$$

Sei jetzt $ggT(m,a) = 1$ und $ggT(m,b) = 1$. Dann gilt $Z = \{0\}$. Denn sei $x = (t_0,t_1,t_2) \in Z$, dann gibt es ein $0 < l < m$ mit $\varphi^l(x) = x$, also in Komponenten ausgedrückt:

$$\eta^{l} \; t_0 = t_0$$

$$\eta^{la} \; t_0 = t_1$$

$$\eta^{lb} \; t_2 = t_2$$

Wäre $x \neq 0$, so würde eine der drei Gleichungen

$$l \equiv 0 \bmod m$$

$$la \equiv 0 \bmod m$$

$$lb \equiv 0 \bmod m$$

folgen, und das ist ein Widerspruch. Dann ist aber $\pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X)) \subseteq \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, also $\mathrm{Sing}(X) \subseteq \{\pi(0)\}$, und folglich ist $A_{m,a,b}$ eine isolierte Singularität.

Falls andererseits o.B.d.A. $p := ggT(m,b) \neq 1$ ist, so schreibe man $m = pq$ mit $q \in \mathbb{N}$. Sei $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$, und $x := (0,0,t)$. Dann berechnet man sofort $I(x) = \{id, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{p-1}\}$ mit $\varphi := \varphi^q$. Dann hat $\varphi_X : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,x}$ die Darstellung:

$$\varphi_X(X_0) = \eta^q X_0$$

$$\varphi_X(X_0) = (\eta^q)^a X_1$$

$$\varphi_X(X_2 - t) = X_2 - t$$

Wähle $0 \leq \tilde{a} < p$ mit $\tilde{a} \equiv a \bmod p$. Wegen $ggT(m,a,b)=1$ ist $\tilde{a} \neq 0$, und man sieht $\mathcal{O}_{X,\pi(x)} \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,x})^{I_X(x)} \cong A_{p,\tilde{a},0}$. Wegen (2.14) ist $\mathcal{O}_{X,\pi(x)}$ singulär. Damit ist

$$\{\pi((0,0,t)) \mid t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathrm{Sing}(X) ,$$

und damit ist $\mathcal{O}_{X,\pi(0)} \cong A_{m,a,b}$ keine isolierte Singularität.

Sei ab jetzt k wieder ein beliebiger Körper, wie in §0 beschrieben.

(2.15) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$ und $0 \leq b < m$ und $ggT(m,a)=1$ und $ggT(m,b)=1$. Dann wollen wir eine k-Algebra vom Isomorphietyp $A_{m,a,b}$ einen dreidimensionalen jungschen Ring nennen.

Bei dieser Namensgebung haben wir uns von der Tatsache

leiten lassen, daß ganz ähnlich gebaute Ringe im Zweidimensionalen auch jungsche Ringe heissen [Sch-W4] . Man weiß zusammengefaßt das Folgende über diese Ringe:

(2.16) Satz: Sei A ein dreidimensionaler jungscher Ring. Dann ist A eine semihomogene k-Algebra der Kodimension 1, die eine normale, dreidimensionale, fastfaktorielle, isolierte Singularität ist.

Beweis: (2.2), (2.3), (2.5), (2.7) und (2.13).

In §3 zeigen wir die Umkehrung dieser Aussage. Im Folgenden zeigen wir einige Eigenschaften von dreidimensionalen jungschen Ringen auf.

(2.17) Sei A ein dreidimensionaler jungscher Ring. Dann ist A eine homogene k-Algebra.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen aus (2.1). Auf B betrachten wir die Derivation

$$\tilde{\delta} := \sum_{i=0}^{2} X_i \frac{\partial}{\partial X_i} \quad .$$

Man sieht sofort, daß $g\tilde{\delta} = \tilde{\delta}g$ für alle $g \in G$ ist. Also läßt sich $\tilde{\delta}$ auf $A_{m,a,b} = B^G$ beschränken. Wie im Beweis von (2.7) zeigt man jetzt, daß $\tilde{\delta}$ eine homogene Derivation auf $A_{m,a,b}$ ist.

(2.18) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$ und $0 \leq b < m$ und $ggT(m,a)=1$ und $ggT(m,b)=1$. Dann gilt:

$$Cl(A_{m,a,b}) \cong \mathbb{Z}_m \quad .$$

Beweis: Wir übernehmen die Bezeichnungen aus (2.1). Aus (2.12)2) folgt $\mathrm{Vzw}_{A_{m,a,b}}{}^{B}$ hat Kodimension ≥ 2. Damit erhält man aus (2.19) eine exakte Sequenz. Da $\mathrm{Cl}(B) = 0$ ist, zeigt diese unsere Behauptung.

(2.19) Sei B eine normale, analytische k-Algebra und $G \leq \mathrm{Aut}_k B$ eine Untergruppe. G sei eine zyklische Gruppe der Ordnung m. Sei $A := B^G$ die Invariantenalgebra und $\mathrm{codim}\ \mathrm{Vzw}_A{}^B \geq 2$. Dann gibt es eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathrm{Cl}(A) \longrightarrow \mathrm{Cl}(B) \longrightarrow 0 .$$

Beweis: [Sam] §2 .

§3 Klassifikation der dreidimensionalen jungschen Ringe

Das Ziel dieses Paragraphen ist es, die folgende Aussage zu beweisen:

(3.1) Satz: Sei A eine semihomogene k-Algebra der Kodimension 1, die eine normale, dreidimensionale, fastfaktorielle, isolierte Singularität ist. Dann ist A ein dreidimensionaler jungscher Ring.

Mit (2.16) zusammen hat man dann eine Klassifikation der dreidimensionalen jungschen Ringe.

Den Beweis von (3.1) führen wir in mehreren Schritten, die jeweils von den nötigen Hilfssätzen unterbrochen werden. Sei also jetzt A eine semihomogene k-Algebra der Kodimension 1, die eine normale, dreidimensionale, fastfaktorielle, isolierte Singularität ist. δ sei die auf A gegebene semihomogene Derivation.

1. Schritt: Es gibt ein Parametersystem x,y,z von A, wobei x homogen vom positiven Grad ist und $y,z \in A_0$.

Beweis: Da A fastfaktoriell und codim $\mathfrak{y}_+ = 1$ ist, gibt es eine Zahl $1 \in \mathbb{N}$, $1 > 0$, mit $\mathfrak{y}_+^{(1)}$ ist ein Hauptideal. Da $\mathfrak{y}_+$ natürlich ein homogenes Ideal ist, ist nach (3.2) $\mathfrak{y}_+^{(1)}$ auch ein homogenes Ideal. Nach (3.3) gibt es also ein homogenes $x \in A$ mit $\mathfrak{y}_+^{(1)} = Ax$. Da nach (1.6) $A_0 \tilde{=} A/\mathfrak{y}_+$ ist, ist dim $A_0=2$. Dort wähle man jetzt beliebig ein Parametersystem y,z. Wir behaupten, daß die Folge x,y,z ein Parametersystem von A ist. Dazu habe ich bloß $\mathfrak{m}_A \leq \sqrt{(x,y,z)A}$

zu zeigen. Dazu genügt es für ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}_A$ zu zeigen, die Erzeugenden liegen in der rechten Menge. Da $\mathfrak{m}_A$ homogen ist, sei also $a \in \mathfrak{m}_A$ mit a homogen. Falls grad(a) = 0 ist, folgt sogar $a \in \sqrt{(y,z)A}$. Falls grad(a) > 0 ist, so ist $a \in \mathfrak{y}_+$, also $a^1 \in \mathfrak{y}_+^{(1)} = Ax$. Also ist x,y,z ein Parametersystem, und (1.15) zeigt grad(x) > 0 .

(3.2) Sei A ein Ring und δ eine Derivation auf A. Sei $\mathfrak{y} \subseteq A$ ein δ-invariantes Primideal von A, und $l \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die symbolische Potenz $\mathfrak{y}^{(l)}$ ein δ-invariantes Ideal.
Beweis: Bekanntlich kann man δ auf die Lokalisierung $A_{\mathfrak{y}}$ fortsetzen. Sei $\tilde{\delta}$ diese Fortsetzung. Falls π: A $\longrightarrow A_{\mathfrak{y}}$ der kanonischen Homomorphismus ist, so ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi} & A_{\mathfrak{y}} \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\delta}} \\ A & \xrightarrow{\pi} & A_{\mathfrak{y}} \end{array}$$

Mit $\mathfrak{y}$ ist nun auch das Produktideal $\mathfrak{y}^l$ ein δ-invariantes Ideal. Dann ist $\mathfrak{y}^l A_{\mathfrak{y}}$ auch $\tilde{\delta}$-invariant, wie man am leichtesten mit einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{y}^l$ sieht. Wir brauchen nun nur noch zu zeigen, daß für ein $\tilde{\delta}$-invariantes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A_{\mathfrak{y}}$ das Ideal $\mathfrak{a} \cap A$ ein δ-invariantes ist. Sei dazu $a \in \mathfrak{a} \cap A$. Es ist $\delta(a) \in \mathfrak{a} \cap A$, das heißt $\frac{\delta(a)}{1} \in \mathfrak{a}$, zu zeigen. Aber es ist $\frac{\delta(a)}{1} = \tilde{\delta}(\frac{a}{1}) \in \mathfrak{a}$.

(3.3) Sei A eine analytische k-Algebra, die ein Integritätsring ist, und δ eine semihomogene Derivation auf A. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein homogenes Ideal. Sei ferner $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal.

Dann gibt es schon ein homoges Element $x \in A$ mit $\mathfrak{a} = Ax$.

Beweis: Da der Fall $\mathfrak{a} = 0$ trivial ist, sei $\mathfrak{a} \neq 0$. Da $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal ist, gibt es ein $y \in A$, $y \neq 0$, mit $\mathfrak{a} = Ay$. Sei $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$ die Zerlegung nach (1.2). Nach (1.11) folgt $y_i \in \mathfrak{a}$ für alle i. Also gibt es Darstellungen $y_i = a_i y$. Da $\operatorname{ugrad}(y_i) \geq i$ ist, folgt mit (1.4)2), daß $\lim_{i \to \infty} \operatorname{ugrad}(a_i) = \infty$. Wegen (1.4)1) existiert die $\mathfrak{m}_A$-adische Summe $a := \sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Dann folgt $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y = ay$. Da A Integritätsring und $y \neq 0$ ist $a=1$, also ein a_{i_0} Einheit, also $\mathfrak{a} = Ay_{i_0}$.

Jetzt weiter im Beweis von (3.1).

2. Schritt: O.B.d.A. kann ich die folgenden zwei Dinge annehmen:

1) δ ist normiert im Sinne von Definition (1.14).

2) Ich habe ein Parametersystem x,y,z von A mit $\operatorname{grad}(x) > 0$ und $y,z \in A_0$, wobei $\operatorname{grad}(x)$ minimal ist, das heißt für jedes andere solche Parametersystem $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ von A gilt:

$$\operatorname{grad}(\tilde{x}) \geq \operatorname{grad}(x) \quad .$$

Beweis: 1) siehe (1.14), und 2) ist klar.

Für den Rest des Beweises seien x,y,z wie oben fest gewählt. Wir setzen $m := \operatorname{grad}(x)$.

3. Schritt: Es gibt ein $v \in A$ mit $\operatorname{grad}(v) = 1$.

Beweis: Da A normal und $\operatorname{codim} \mathfrak{p}_+ = 1$ ist, ist $A_{\mathfrak{p}_+}$ ein diskreter Bewertungsring. Sein maximales Ideal $\mathfrak{p}_+ A_{\mathfrak{p}_+}$ wird also von einem Element erzeugt. Da $\mathfrak{p}_+$ von homogenen Elementen

erzeugt wird, kann man dieses in der Form $\frac{v}{l}$, mit $v \in A$ homogen, darstellen. Sei $u \in A$ ein beliebiges homogenes Element. Im diskreten Bewertungsring $A_{\mathfrak{p}_+}$ kann ich $\frac{u}{l}$ als Produkt einer Einheit mit einer Potenz von $\frac{v}{l}$ schreiben. Also habe ich eine Darstellung $\frac{u}{l} = \frac{s}{t}(\frac{v}{l})^1$ mit $1 \in \mathbb{N}$ und $s,t \in A \setminus \mathfrak{p}_+$. Also gilt in A: $tu = s\, v^1$. Seien $s = \sum_{i=0}^{\infty} s_i$ und $t = \sum_{i=0}^{\infty} t_i$ die Entwicklungen nach (1.2). Da $s,t \in A \setminus \mathfrak{p}_+$ ist, ist $s_0 \neq 0$ und $t_0 \neq 0$. Ein Gradvergleich ergibt $t_0 u = s_0 v^1$, also gilt grad(u) = 1 grad(v) oder grad(v) teilt grad(u) . Da u ein beliebiges homogenes Element von A ist, ist also $\frac{1}{\text{grad}(v)}\delta$ eine semihomogene Derivation auf A , und aus der Bedingung 1) des 2-ten Schrittes folgt grad(v) = 1 .

4. Schritt: Das Polynom $T^m - x$ ist irreduzibel in $\text{Quot}(A)[T]$.
Beweis: Wir verwenden (3.4). Sei also $\tilde{x} \in A$ mit $\tilde{x}^l = x$ und $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$. Wir können o.B.d.A. $\tilde{x}$ homogen wählen. Da dann aber $\tilde{x},y,z$ auch ein Parametersystem in A ist, würde aus 2) des zweiten Schrittes folgen, daß $\text{grad}(\tilde{x}) \geq \text{grad}(x)$ ist, und damit $l = 1$, Widerspruch !

(3.4) Sei A eine normale k-Algebra. Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$. Sei $x \in A$ und es gebe kein $\tilde{x} \in A$ mit $\tilde{x}^l = x$, $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$ und l teilt m. Dann ist $T^m - x$ irreduzibel in $\text{Quot}(A)[T]$.
Beweis: Sei $T^m - x$ reduzibel in $K[T]$, $K := \text{Quot}(A)$, und g ein Teiler vom Grad l mit $1 \leq l \leq m$. Sei L ein Erweiterungskörper von K, in dem ein $y \in L$ existiert mit $y^m = x$. Sei ζ eine primitive m-te Einheitswurzel, die ja schon in A liegt. Dann gilt $T^m - x = \prod_{i=1}^{m} (T - \zeta^i y)$ in $L[T]$. Der Teiler g ist ein Produkt von l dieser Linearfaktoren. Betrachtet man

das konstante Glied dieses Polynomes, so sieht man, daß $\xi^k y^l \in K$ ist mit $k \in \mathbb{N}$ passend. Da $\xi \in K$ ist, folgt $y^l \in K$. Wegen $1 \leq l < m$ ist $p := ggT(l,m) < m$. Wähle $r,s \in \mathbb{Z}$ mit $p = rl + sm$. Dann ist $y^p = (y^l)^r (y^m)^s = (y^l)^r x^s \in K$. Aber es ist $(y^p)^{\frac{m}{p}} = x$ und $\frac{m}{p} \geq 2$. Weil A normal ist, wäre $y^p \in A$. Dies ergibt nun einen Widerspruch zur Voraussetzung.

5. Schritt: Sei $K := Quot(A)$. $L := K[T]/(T^m - x)$ ist nach dem 4-ten Schritt ein Erweiterungskörper von K. Sei ξ die Restklasse von T in L, also $\xi^m = x$. B sei die ganze Hülle von A in L. Natürlich ist $\xi \in B$, und man sieht sofort $L = Quot(A[\xi])$. Also kann ich B auch als die Normalisierung von $A[\xi]$ beschreiben.

B ist ebenfalls eine normale, dreidimensionale, analytische k-Algebra, die endlich über A ist. Durch $\delta(\xi) := \xi$ läßt sich die Derivation δ auf B fortsetzen, und ist auf B eine semihomogene Derivation. Die Folge ξ, y, z ist ein Parametersystem in B.

Beweis: Als ganze Hülle ist B natürlich normal. Weil $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung ist, ist auch B dreidimensional. Nach [G-R] II §7 Satz 2 ist B wiederum analytische k-Algebra und endlich über A. Da A normal ist, hat man $A[\xi] \cong A[T]/(T^m - x)$. Daran sieht man, daß man δ durch die Vorschrift $\delta(\xi) = \xi$ auf $A[\xi]$ fortsetzen kann. Da B die Normalisierung von $A[\xi]$ ist, kann ich δ auf B fortsetzen, und (1.16) zeigt, daß δ eine semihomogene Derivation auf B ist. Weil $A \subseteq B$ endlich ist, ist x, y, z ein Parametersystem in B. Wegen $\xi^m = x$ ist es auch die Folge ξ, y, z .

6. Schritt: codim $Vzw_A^B \geq 2$

Beweis: $\mathfrak{m}_A^B$ sei das Diskriminantenideal der A-Algebra B (siehe [Sch-St] §13). Wir benutzen den Hilfssatz (3.5). Da $\xi^m = x \in A$ und $Quot(A[\xi]) = L$ ist, folgt damit zum Beispiel $x \in \sqrt{\mathfrak{m}_A^B}$. Nach dem 3-ten Schritt gibt es $v \in A$ mit $grad(v)=1$. Nach (3.6)a) gibt es ein $h \in A_0$ mit $v^m = x\,h = \xi^m h$. Oder $(\frac{v}{\xi})^m = h$. Also ist $\frac{v}{\xi} \in B$. Wegen $Quot(A[\frac{v}{\xi}]) = L$ folgt mit (3.5) $h \in \sqrt{\mathfrak{m}_A^B}$. Ich beweise gleich, daß x,h eine Primfolge ist. Da sie in $\sqrt{\mathfrak{m}_A^B}$ liegt, folgt $codim\sqrt{\mathfrak{m}_A^B} \geq 2$ und damit die Behauptung. Nun zum Beweis, daß x,h Primfolge ist.

Es genügt zu zeigen: $\mathfrak{y}_+$ ist das einzige assoziierte Primideal von Ax; denn $h \notin \mathfrak{y}_+$ wegen $h \in A_0$. Sei $\mathfrak{y}$ ein assoziiertes Primideal von Ax. Da A normal ist, ist $\mathfrak{y}$ ein minimales Primideal über Ax, und damit gilt $codim\,\mathfrak{y} = 1$. Also hat der Ring $A/\mathfrak{y}$ die Dimension 2. Dort sind die Restklassen von y und z ein Parametersystem, und die induzierte Derivation nimmt auf ihnen den Wert Null an. $\mathfrak{y}$ ist als assoziiertes Ideal eines homogenen Ideals auch homogen, so daß überhaupt eine Derivation induziert wird. Nach (1.15) ist dann die ganze induzierte Derivation Null. Daraus folgt $\mathfrak{y}_+ \subseteq \mathfrak{y}$. Weil beides Primideale der Kodimension eins sind, folgt die Gleichheit.

(3.5) Sei $A \subseteq B$ eine endliche Erweiterung von normalen Ringen des Ranges m. Sei $b \in B$ mit $b^m \in A$ und $Quot(A[b]) = Quot(B)$. Dann ist $b^m \in \sqrt{\mathfrak{m}_A^B}$.

Beweis: Da A normal ist, hat b über A ein Minimalpolynom. Ich behaupte, dieses ist $T^m - b^m \in A[T]$. Dazu brauche ich nur zu zeigen: Der Grad des Minimalpolynomes kann nicht kleiner als m sein. Wäre er es aber, so müßte Quot(A[b]) über K := Quot(A) einen Grad kleiner als m haben, und es wäre Quot(A[b]) $\neq$ L := Quot(B). Also haben wir $A[b] \cong A[T]/(T^m - b^m)$. Aus der Theorie der einfachen, freien Algebren [Sch-St] §17 folgt, daß $\det(Sp_K^L(b^{i+j}))_{0 \leq i,j \leq m-1}$ bis aufs Vorzeichen eine Potenz von b^m ist. Aus der Definition von $\mathfrak{n}_A^B$ folgt aber, solch ein Gebilde ist in $\mathfrak{n}_A^B$. Also ist $b^m \in \sqrt{\mathfrak{n}_A^B}$.

(3.6) Sei A eine normale, analytische k-Algebra und δ eine semihomogene Derivation auf A. Sei x,y,z ein Parametersystem von A. Es gelte $\delta(x) = m\,x$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $y,z \in A_0$. Dann gelten:

1) Für jedes $y \in A$ homogen vom Grad 1 gibt es ein $h \in A_0$ mit $y^m = x^1 h$.

2) Ist m=1, so ist $A = A_0 \hat{\otimes} k\langle X \rangle$.

Beweis: Zu 1): Das Element y^m hat den Grad 1m und hat über dem Ring $k\langle x,y,z \rangle$ ein Minimalpolynom der Form

$$(y^m)^n + b_{n-1}(y^m)^{n-1} + \ldots + b_0 = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ und $b_i \in k\langle x,y,z \rangle$. Nach [Sch-W3] (2.13) sind auch die b_i homogen, und zwar $\operatorname{grad}(b_i) = (n-i)1m$ für $0 \leq i \leq n-1$. Da aber $\operatorname{grad}(x) = m$, $\operatorname{grad}(y) = \operatorname{grad}(z) = 0$ ist, hat ein solches Element die Form $b_i = (x^1)^{(n-i)}\,\tilde{b}_i$ mit $\tilde{b}_i \in k\langle y,z \rangle$. Dies oben eingesetzt und durch $(x^1)^n$ dividiert ergibt:

$$\left(\frac{y^m}{x^l}\right)^n + b_{n-1}\left(\frac{y^m}{x^l}\right)^{n-1} + \ldots + b_0 = 0 \quad .$$

Also ist das Element $h := \frac{y^m}{x^l} \in \mathrm{Quot}(A)$ ganz über A . Da A normal ist, liegt es in A . Aus Gradgründen ist $h \in A_0$.

Zu 2): Sei also jetzt m=1 . Wir bilden $k\langle X\rangle$ nach A ab, indem wir X auf x abbilden. A_0 ist als Unteralgebra schon in A abgebildet. Beide Homomorphismen ergeben zusammen einen Homomorphismus $\alpha : A_0 \hat{\otimes} k\langle X\rangle \longrightarrow A$. Wir zeigen α ist bijektiv. Dazu zeigen wir zuerst, daß α surjektiv ist. Da A semihomogen ist, genügt es zu zeigen: Alle homogenen Elemente aus A liegen im Bild von α . Dies ist aber nach 1) klar. Da A als normaler Ring speziell Integritätsring ist, ist auch A_0 ein Integritätsring. Dann auch $A_0 \hat{\otimes} k\langle X\rangle$ nach [G-R] III §5 Satz 16. Aus der Voraussetzung über das Parametersystem liest man ab, daß dim A = 3 und dim A_0 = 2 ist. Dann ist also dim $A_0 \hat{\otimes} k\langle X\rangle = 3$. Wäre α nicht injektiv, so wäre $A \cong A_0 \hat{\otimes} k\langle X\rangle / \mathrm{Kern}\alpha$ nur zweidimensional. Widerspruch !

7. Schritt: B und B_0 sind regulär und $B \cong B_0 \hat{\otimes} k\langle X\rangle$.

Beweis: Aus Schritt 6 und (2.8)1) folgt, daß B auch eine isolierte Singularität ist. Auf B und sein Parametersystem ξ, y, z kann ich jetzt aber (3.6)2) anwenden und erhalte $B = B_0 \hat{\otimes} k\langle X\rangle$. Wäre B_0 singulär, so wäre der singuläre Ort von B wenigstens eindimensional, was ein Widerspruch zur isolierten Singularität ist. Also ist B_0 regulär und dann auch B.

8. Schritt: Sei $\tilde{\varphi}: L \longrightarrow L$ der K-Algebrahomomorphismus mit $\tilde{\varphi}(\xi) = \eta\xi$, wobei η eine m-te primitive Einheitswurzel sei. Es gilt $\tilde{\varphi}(B) \subseteq B$. Sei $\varphi := \tilde{\varphi}/B$ und $G := \{id, \varphi, \ldots, \varphi^{m-1}\}$ die von φ erzeugte Automorphismengruppe. Dann gilt: $A = B^G$.

Beweis: Da $\eta \in k \subseteq K$ ist, rechnet man sofort aus, daß die Galoisgruppe von L über K aus $id, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^2, \ldots, \tilde{\varphi}^{m-1}$ besteht. Da L der Zerfällungskörper des separablen Polynoms $T^m - x$ ist, ist L über K eine endliche Galoiserweiterung. Der Rest der Behauptung folgt nun aus (3.7).

(3.7) Sei $A \subseteq B$ eine endliche Erweiterung normaler Ringe. Quot(B) sei eine endliche Galoiserweiterung von Quot(A). $\tilde{G}$ sei die Galoisgruppe dieser Körpererweiterung. Dann gelten:

1) Für alle $\tilde{\sigma} \in \tilde{G}$ ist $\tilde{\sigma}(B) \subseteq B$.

2) Sei $G := \{\tilde{\sigma}/B \mid \tilde{\sigma} \in G\}$. Dann ist $A = B^G$.

Beweis: Zu 1): Sei $b \in B$. Dann erfüllt b eine Ganzheitsgleichung über A. Da $\tilde{\sigma}$ die Elemente von A invariant läßt, erfüllt $\tilde{\sigma}(b)$ genau dieselbe Ganzheitsgleichung über A. Speziell ist $\tilde{\sigma}(b)$ ganz über B. Da B normal ist, folgt $\tilde{\sigma}(b) \in B$.

Zu 2): $A \subseteq B^G$ ist klar, da die $\tilde{\sigma} \in G$ natürlich $A \subseteq \mathrm{Quot}(A)$ invariant lassen. Es bleibt $B^G \subseteq A$ zu zeigen. Sei $b \in B^G$. Dann folgt $b \in \mathrm{Quot}(B)$ und $\tilde{\sigma}(b) = b$ für alle $\tilde{\sigma} \in \tilde{G}$. Da Quot(B) über Quot(A) eine Galoiserweiterung ist, folgt $b \in \mathrm{Quot}(A)$. Da $A \subseteq B$ endlich ist, ist b ganz über A. Zusammen folgt $b \in A$, weil A normal ist.

9. Schritt: $\varphi(B_0) \subseteq B_0$.

Beweis: Dazu genügt es, $\varphi \circ \delta = \delta \circ \varphi$ zu zeigen. Diese Gleichung ist auf A ja klar, da $\varphi | A = id$. Für ξ berechnet man: $\varphi \circ \delta(\xi) = \varphi(\xi) = \eta\xi = \delta(\eta\xi) = \delta \circ \varphi(\xi)$.

Daraus folgert man, daß die gewünschte Gleichung auf ganz $A[\xi]$ gilt. Dann gilt sie auch auf $Quot(A[\xi]) = L$ und dann auch in $B \subseteq L$.

10. Schritt: Sei $\varphi_0 := \varphi | B_0$, was ich nach Schritt 9 bilden kann. Dann hat φ_0 die Ordnung m .

Beweis: Sei G_0 die von φ_0 erzeugte Automorphismengruppe von B_0 . Aus Schritt 8 folgt sofort $A_0 = B_0^{G_0}$. Wegen (3.7) genügt es zu zeigen: B_0 hat den Rang m über A_0 . Habe B_0 über A_0 den Rang $< m$. Sei $C := B_0[A]'$ die Normalisierung der Algebra $B_0[A]$. Dann hat auch C über A den Rang $< m$. Ich zeige gleich $C = B$ und habe damit einen Widerspruch.

Es gilt $B_0\langle x\rangle \subseteq C \subseteq B$. Man beachte $B = B_0\langle\xi\rangle$ und $x = \xi^m$. Da die normalen Zwischenringe von $B_0\langle\xi^m\rangle$ und $B_0\langle\xi\rangle$ durch ihre Quotientenkörper klassifiziert werden, sieht man, daß sie alle die Form $B_0\langle\xi^r\rangle$ mit $1 \leq r \leq m$ haben. Wäre $C = B_0\langle\xi^r\rangle$ mit $r > 1$, so hätten alle homogenen Elemente in $A \subseteq C$ einen Grad, der ein Vielfaches von r ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu 1) aus Schritt 2.

11. Schritt: Es gibt $y_1, z_1 \in B_0$, so daß ξ, y_1, z_1 ein reguläres Parametersystem des Ringes B ist, und es gibt $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$ und $0 \leq b < m$ und $ggT(a,b) = 1$ und

$$\varphi(\xi) = \eta\ \xi$$
$$\varphi(y_1) = \eta^a\ y_1$$
$$\varphi(z_1) = \eta^b\ z_1 \quad .$$

Beweis: Nach dem 7-ten Schritt ist B_0 eine reguläre, zweidimensionale, analytische k-Algebra. Nach [G-R] III §3 3. kann ich ein reguläres Parametersystem y_1, z_1 in B_0 finden, so daß $\varphi_0(y_1) = \eta^a\ y_1$ und $\varphi_0(z_1) = \eta^b\ z_1$ und $a,b \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a < m$, $0 \leq b < m$ und $ggT(a,b) = 1$ gilt. Damit habe ich die gesuchte Normalform von φ gefunden. Daß ξ, y_1, z_1 ein reguläres Parametersystem auf B ist, folgt aus $B \cong B_0 \hat{\otimes} k\langle X \rangle$ (siehe Schritt 7).

12. Schritt: A ist ein dreidimensionaler jungscher Ring.
Beweis: Aus Schritt 10 und Schritt 8 folgt, daß A eine Algebra des Typs $A_{m,a,b}$ ist. Aus $ggT(a,b) = 1$ folgt $ggT(m,a,b) = 1$. Da A eine isolierte Singularität ist, folgt aus (2.11) $ggT(m,a) = 1$ und $ggT(m,b) = 1$. Damit ist A ein dreidimensionaler jungscher Ring.

Damit ist der Beweis von (3.1) beendet.

(3.8) Satz: Sei A eine semihomogene k-Algebra der Kodimension 1, die eine normale, dreidimensionale, fastfaktorielle, isolierte Singularität ist. Dann ist A eine homogene k-Algebra.
Beweis: (3.1) und (2.17).

(3.9) Satz: Sei A eine semihomogene k-Algebra der Kodimension 1, die eine normale, dreidimensionale, isolierte Singularität ist. Dann sind äquivalent:

1) A ist fastfaktoriell.

2) A hat ein Parametersystem aus homogenen Elementen.

3) A ist dreidimensionaler jungscher Ring.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) ist nur Schritt 1 des Beweises von (3.1).

2) $\Rightarrow$ 3): Wir zeigen, daß man die Behauptungen des Schritt 1 erreichen kann. Denn für den Rest des Beweises von (3.1) wird die Voraussetzung "fastfaktoriell" nicht mehr verwendet, und es folgt also 3). Aus 2) folgt, daß es ein Parametersystem x,y,z von A gibt aus homogenen Elementen. Aus (1.15) folgt, es können nicht alle Elemente den Grad Null haben. Aus codim $\mathfrak{p}_+ = 1$ folgt, daß aber auch nur eines der Elemente positiven Grad haben kann. Also ist die Behauptung aus Schritt 1 erfüllt.

3) $\Rightarrow$ 1): Siehe (2.16).

§4 Die Ringe vom Typ I und II

In diesem und dem nächsten Kapitel besprechen wir zwei Typen von semihomogenen k-Algebren der Kodimension 2. Mangels Phantasie nennen wir diese Typen einfach "Typ I" und "Typ II". Im Folgenden definieren wir diese beiden Typen und leiten einige ihrer Eigenschaften her. Im §5 werden sie durch diese Eigenschaften klassifiziert.

(4.1) Def: Seien $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$ $\alpha,\beta > 0$ mit $ggT(\alpha,\beta) = 1$. Auf dem konvergenten Potenzreihenring $A := k\langle Z,U,V\rangle$ betrachten wir die Derivation

$$\delta := \alpha U\frac{\partial}{\partial U} + \beta V\frac{\partial}{\partial V} \quad .$$

A versehen mit dieser Derivation, und natürlich alle dazu isomorphen Ringe mit Derivation, nennen wir einen Ring vom Typ I.

Die Bedingung $ggT(\alpha,\beta) = 1$ garantiert, daß δ normiert ist im Sinne von (1.14). Man sieht sofort: $\mathcal{P}_{+A} = (U,V)$ und $A_0 = k\langle Z\rangle$. Das von $A_0 \cap \mathfrak{m}_A$ erzeugte Ideal ist das Primideal (Z). Dieser Typ I ist eher ein ganz einfacher Grenzfall, interessanter ist da schon der folgende Typ II.

(4.2) Def: Seien $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$ $\alpha,\beta > 0$ mit $ggT(\alpha,\beta) = 1$. Sei $t \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Im konvergenten Potenzreihenring $k\langle Z,Y,U,V\rangle$ betrachten wir die Potenzreihe $Z^tY - V^\alpha - g\,U^\beta$, wobei $g \in k\langle Z\rangle$ eine Einheit sein soll. Wir setzen

$$A := k\langle Z,Y,U,V\rangle/(Z^tY - V^\alpha - g\,U^\beta) \quad .$$

Auf $k\langle Z,Y,U,V\rangle$ betrachte ich die Derivation

$$\tilde{\delta} := \alpha\beta Y\frac{\partial}{\partial Y} + \alpha U\frac{\partial}{\partial U} + \beta V\frac{\partial}{\partial V} \quad .$$

Man sieht sofort, daß $\tilde{\delta}$ unsere Potenzreihe invariant läßt und deshalb auf A eine Derivation δ induziert. A versehen mit dieser Derivation, und natürlich alle dazu isomorphen Ringe mit Derivation, nennen wir einen Ring vom Typ II.

Die Bedingung $ggT(\alpha,\beta) = 1$ bedeutet wieder nur, daß δ normiert ist im Sinne von (1.14). Falls $\alpha=1$, so ist $A = k\langle Z,Y,U\rangle$ und $\delta = \beta Y\frac{\partial}{\partial Y} + U\frac{\partial}{\partial U}$, also ist A dann ein Ring vom Typ I. Falls $\beta=1$, so ist $A = k\langle Z,Y,V\rangle$ und $\delta = \alpha Y\frac{\partial}{\partial Y} + V\frac{\partial}{\partial V}$, also ist A dann ein Ring vom Typ I. Falls $\alpha,\beta \geq 2$, so ist A kein regulärer Ring, also nicht vom Typ I.

(4.3) Sei A ein Ring vom Typ II. Dann ist A eine dreidimensionale, analytische k-Algebra. Ferner ist A eine semihomogene k-Algebra von der Kodimension 2.
Beweis: Da nach (1.7) $\mathfrak{g}_+ = (y,u,v)$ ist, wobei y,u,v jeweils die Restklassen von Y,U,V seien, ist alles klar.

(4.4) Sei A ein Ring vom Typ II. Dann gelten:
1) A ist ein normaler Ring.
2) Seien t,α,β wie in (4.2). Dann ist A genau dann eine isolierte Singularität, wenn $t=1$ oder $\alpha=1$ oder $\beta=1$ ist.

Beweis: Für $\alpha=1$ oder $\beta=1$ ist alles klar. Sei also $\alpha,\beta \geq 2$. Wir verwenden die Bezeichnungen aus (4.2). Wir benutzen das

Kriterium (4.5). Dazu berechnen wir jetzt den singulären Ort von A:

$$\begin{aligned}\text{Sing } A &= V(Z^tY - V^\alpha - g\,U^\beta,\ tZ^{t-1}Y - g'U^\beta,\ Z^t,\ \alpha V^{\alpha-1},\ g\beta U^{\beta-1}) \\ &= V(Z^tY - V^\alpha - g\,U^\beta,\ tZ^{t-1}Y - g'U^\beta, Z, U, V) \\ &= V(Z,U,V,Z^{t-1}Y)\end{aligned}$$

Dabei ist g' die Ableitung von $g \in k\langle Z\rangle$ nach Z. Falls $t > 1$, so ist $\text{Sing } A = V(Z,U,V)$ und $\operatorname{codim} \text{Sing } A = 2$. Bei $t=1$ ist $\operatorname{codim} \text{Sing } A = 3$, also A eine isolierte Singularität.

(4.5) Sei A eine analytische k-Algebra, die ein Macaulayring ist. Dann gilt:

A normal $\iff$ $\operatorname{codim} \text{Sing } A \geq 2$

A isolierte Singularität $\iff$ $\operatorname{codim} \text{Sing } A = \dim A$

Beweis: [Sch] III §8.

(4.6) Sei A ein Ring vom Typ I oder vom Typ II. Dann ist A eine normale, dreidimensionale, semihomogene k-Algebra der Kodimension 2. Der Ring $A_{\mathfrak{p}_+}$ ist ein regulärer lokaler Ring, und das von $A_0 \cap \mathfrak{m}_A$ erzeugte Ideal ist ein Primideal. Ferner ist die Derivation auf A normiert im Sinne von (1.14).

Beweis: Für den Typ I ist das alles klar. Sei also A vom Typ II, und verwenden wir die Bezeichnungen aus (4.2). z,y,u,v seien die Restklassen in A von Z,Y,U,V. Wir wissen $\mathfrak{p}_+ = (y,u,v)$, also $\mathfrak{p}_+ A_{\mathfrak{p}_+} = (\frac{y}{1}, \frac{u}{1}, \frac{v}{1})$. In $A_{\mathfrak{p}_+}$ ist aber $\frac{z^t}{1}$ eine Einheit, und die Gleichung $\frac{y}{1} = \frac{1}{z^t}\left(\frac{v^\alpha}{1} + \frac{g}{1}\frac{u^\beta}{1}\right)$ zeigt $\mathfrak{p}_+ A_{\mathfrak{p}_+} = (\frac{u}{1}, \frac{v}{1})$. Da $\dim A_{\mathfrak{p}_+} = 2$ ist, folgt damit, daß $A_{\mathfrak{p}_+}$ regulär ist.

Man sieht sofort $A_0 = k\langle z\rangle$. Also ist (z) das von $A_0 \cap \mathfrak{m}_A$

erzeugte Ideal. Es ist $A/(z) \cong k\langle Z,Y,U,V\rangle/(Z,Z^tY - V^\alpha - g\,U^\beta) \cong k\langle Y,U,V\rangle/(V^\alpha - \bar{g}\,U^\beta)$, wobei $\bar{g} \neq 0$ der konstante Term der Einheit g ist. Also ist $A/(z)$ ein Integritätsring und (z) ein Primideal.

(4.7) Sei A ein Ring vom Typ I oder II. Dann ist A (mit einer anderen Derivation) homogen.

Beweis: Für Typ I ist das klar. Sei also A jetzt vom Typ II und wir verwenden die Bezeichnungen aus (4.2). Da g Einheit und k algebraisch abgeschlossen ist, kann ich ein $\tilde{g} \in k\langle z\rangle$ finden mit $\tilde{g}^\beta = g$. Nach Umbenennen der Unbestimmten U zu $\tilde{g}U$ kann ich o.B.d.A. g=1 annehmen. Jetzt ordne man den Unbestimmten die folgenden Grade zu:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(u) &= 2t\alpha \\ \operatorname{grad}(v) &= 2t\beta \\ \operatorname{grad}(z) &= \alpha\beta \\ \operatorname{grad}(y) &= t\alpha\beta \quad . \end{aligned}$$

(4.8) Sei A ein Ring vom Typ I oder II, der eine isolierte Singularität ist. Dann ist A faktoriell.

Beweis: Für Typ I ist wieder alles klar. Im Falle des Typ II gehe ich wie oben vor und kann o.B.d.A g=1 annehmen. Außerdem kann ich $\alpha,\beta \geq 2$ annehmen. Aus (4.4)2) folgt t=1. Eine kleine Umbenennung der Unbestimmten Z und Y läßt mich A auf die Form $k\langle Z,Y,U,V\rangle/(Z^2 + Y^2 + V^\alpha + U^\beta)$ bringen. Aus [B-St] (12.8) folgt nun die Behauptung.

§ 5 Klassifikation der Ringe vom Typ I und II

Das Ziel dieses Paragraphen ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

(5.1) Satz: Sei A eine normale, dreidimensionale, semihomogene k-Algebra der Kodimension 2. Der Ring $A_{\mathfrak{y}_+}$ sei ein regulärer lokaler Ring, und das von $A_0 \cap \mathfrak{m}_A$ erzeugte Ideal sei ein Primideal. Die Derivation auf A sei im Sinne von (1.14) normiert. Dann ist A ein Ring vom Typ I oder II.

Mit (4.6) zusammen hat man dann eine Klassifikation der Ringe vom Typ I und II.

Den Beweis von (5.1) führen wir in mehreren Schritten, die jeweils von den nötigen Hilfssätzen unterbrochen werden. Sei also jetzt A eine normale, dreidimensionale, semihomogene k-Algebra der Kodimension 2. $A_{\mathfrak{y}_+}$ sei ein regulärer lokaler Ring, und das von $A_0 \cap \mathfrak{m}_A$ erzeugte Ideal sei ein Primideal. δ sei die auf A gegebene semihomogene Derivation, und sie sei im Sinne von (1.14) normiert.

1. Schritt: Es gibt ein Primelement $z \in A$ mit $A_0 = k\langle z\rangle$; A_0 ist also ein konvergenter Potenzreihenring in einer Unbestimmten.

Beweis: Da $\operatorname{codim} \mathfrak{y}_+ = 2$ ist, ist $\dim A/\mathfrak{y}_+ = 1$. Nach (1.6) hat also die analytische k-Algebra A_0 die Dimension 1. Mit A ist auch A_0 normal, und damit ist A_0 eine reguläre, analytische, eindimensionale k-Algebra. Also gibt es ein $z \in A$ mit $A_0 = k\langle z\rangle$. Da (z) das von $A_0 \cap \mathfrak{m}_A$ erzeugte Ideal ist, ist z ein Primelement.

2. Schritt: Es gibt homogene Elemente $u,v \in \mathfrak{y}_+$ derart, daß die Folge $\frac{u}{1},\frac{v}{1}$ ein reguläres Parametersystem von A ist, und daß $u,v \notin (z)$ gilt. Wir setzen $\alpha := \operatorname{grad}(u)$ und $\beta := \operatorname{grad}(v)$.

Beweis: Da A eine semihomogene k-Algebra ist, hat $\mathfrak{y}_+$ nach (1.7) ein Erzeugendensystem aus homogenen Elementen. Diese Elemente erzeugen auch $\mathfrak{y}_+ A_{\mathfrak{y}_+}$. Da $A_{\mathfrak{y}_+}$ aber regulärer, lokaler Ring der Dimension zwei ist, kann ich unter diesen zwei Elemente auswählen, die ein reguläres Parametersystem bilden. Nennen wir diese beiden Elemente u und v, so ist alles bis auf $u,v \notin (z)$ erfüllt. Dazu schreibe ich $u = z^t \tilde{u}$ mit $t \in \mathbb{N}$, $\tilde{u} \notin (z)$, nach (5.2). Da $\frac{z^t}{1}$ in $A_{\mathfrak{y}_+}$ eine Einheit ist, kann ich o.B.d.A. u durch $\tilde{u}$ ersetzen. Analog für v.

(5.2) Sei A ein noetherscher Integritätsring, $z \in A$ keine Einheit und $z \neq 0$. Dann gibt es für jedes $u \in A$, $u \neq 0$, genau ein $t \in \mathbb{N}$ und ein $\tilde{u} \in A$ mit

$$u = z^t \tilde{u} \quad \text{und} \quad \tilde{u} \notin (z) .$$

Beweis: Im noetherschen Integritätsring gilt $\bigcap_{n=0}^{\infty} (z^n) = 0$ nach [Mat] (11.D) Corollary 3. Also gibt es eine Darstellung $u = z^t \tilde{u}$, wobei t maximal ist. Dann muß notwendig $u \notin (z)$ sein. Sei $u = z^s \tilde{\tilde{u}}$ eine zweite solche Darstellung mit o.B.d.A. $s > t$. Dann liefert Gleichsetzen und Kürzen $\tilde{u} = z^{s-t} \tilde{\tilde{u}} \in (z)$. Widerspruch !

3. Schritt: Falls z,u,v ein Parametersystem in A ist, so ist A ein Ring vom Typ I. Sei deshalb ab jetzt z,u,v kein Parametersystem in A.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $k\langle z,u,v\rangle \subseteq A$ endlich. Ich

zeige gleich, daß beide Ringe denselben Quotientenkörper haben. Weil $k\langle z,u,v\rangle$ normal ist, folgt damit $A = k\langle z,u,v\rangle$. Da $z \in A_0$, $\text{grad}(u) = \alpha > 0$ und $\text{grad}(v) = \beta > 0$ gelten, und $\text{ggT}(\alpha,\beta)=1$ aus der Normiertheit von δ folgt, ist A ein Ring vom Typ I.

Es bleibt, die Gleichheit der Quotientenkörper zu zeigen. Da A semihomogen ist, genügt es zu zeigen: Alle homogenen Elemente $y \in A$ liegen in $\text{Quot}(k\langle z,u,v\rangle)$. Dies folgt aber sofort aus (5.3)1).

(5.3) Sei A eine semihomogene k-Algebra der Kodimension 2. Sei $z \in A$ ein Primelement mit $A_0 = k\langle z\rangle$. Seien u,v homogene Elemente aus $\mathfrak{p}_+$ derart, daß die Folge $\frac{u}{1}$, $\frac{v}{1}$ ein reguläres Parametersystem in $A_{\mathfrak{p}_+}$ ist. Sei $\alpha := \text{grad}(u)$ und $\beta := \text{grad}(v)$. Dann gelten:

1) Für jedes $y \in A$ homogen, gibt es ein $t \in \mathbb{N}$ und Elemente $a_{ij} \in k\langle z\rangle$ mit

$$z^t y = \sum_{i\alpha + j\beta = \text{grad}(y)} a_{ij}\, u^i\, v^j$$

Dabei ist $t=0$ oder eines der a_{ij} eine Einheit.

2) Sei $\text{ggT}(\alpha,\beta)=1$, $v \notin (z)$ und die Folge z,u,v kein Parametersystem. Sei $y \in A$ homogen, derart, daß z,u,y ein Parametersystem ist. Dann gibt es ein $\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, $t \in \mathbb{N}$ und Elemente $a_i \in k\langle z\rangle$ mit:

$$z^t y = \sum_{i=0}^{\gamma} a_i u^{\beta i}\, v^{\alpha(\gamma - i)}$$

Dabei ist a_0 eine Einheit und $t > 0$.

Beweis: Zu 1): Da $A_0 \cap \mathfrak{y}_+ = 0$ ist, ist $K := \mathrm{Quot}(k\langle z\rangle)$ ein Unterkörper von $A_{\mathfrak{y}_+}$. Da

$$A_{\mathfrak{y}_+}/\mathfrak{y}_+A_{\mathfrak{y}_+} \cong \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{y}_+) \cong \mathrm{Quot}(A_0) = \mathrm{Quot}(k\langle z\rangle) = K$$

ist, ist dieser Unterkörper ein Koeffizientenkörper für den lokalen Ring $A_{\mathfrak{y}_+}$. Da $A_{\mathfrak{y}_+}$ nach Voraussetzung ein regulärer lokaler Ring ist, ist $\hat{A}_{\mathfrak{y}_+}$, die Komplettierung, ein formaler Potenzreihenring in den Unbestimmten $\frac{u}{1}$ und $\frac{v}{1}$ mit Koeffizienten in K. Das Element $\frac{y}{1}$ kann ich dort als eine solche Potenzreihe schreiben. Sei δ die auf A vorgegebene Derivation. Zuerst kann man δ auf $A_{\mathfrak{y}_+}$ fortsetzen und dann auch auf $\hat{A}_{\mathfrak{y}_+}$. Da $\delta|K = 0$ ist, ist δ eine homogene K-Derivation auf $\hat{A}_{\mathfrak{y}_+}$. Macht man jetzt einen Gradvergleich, so erhält man eine Darstellung

$$\frac{y}{1} = \sum_{i\alpha + j\beta = \mathrm{grad}(y)} b_{ij}\left(\frac{u}{1}\right)^i\left(\frac{v}{1}\right)^j$$

mit Elementen $b_{ij} \in K$. Da alle beteiligten Elemente schon in $A_{\mathfrak{y}_+}$ liegen, gilt diese Gleichung auch in $A_{\mathfrak{y}_+}$. Wir wählen nun $t \in \mathbb{N}$ minimal mit $a_{ij} := z^t b_{ij} \in k\langle z\rangle$. Dann entsteht durch Multiplizieren mit z^t eine Gleichung der gewünschten Form. Falls $t > 0$ und keines der a_{ij} eine Einheit wäre, so wäre $z^{t-1}b_{ij} \in k\langle z\rangle$ im Widerspruch zur Minimalität von t.

Zu 2): Wir wählen zuerst eine Gleichung wie in 1). Wir behaupten nun, daß in dieser Summe ein Summand vorkommt, der eine reine Potenz von u ist. Denn sonst würde die Gleichung zeigen, daß $z^t y \in (v)$ gilt. Da $v \notin (z)$ ist, folgt $y \in (v)$, und damit wäre z,u,v ein Parametersystem, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Wir behaupten weiter, daß eine reine Potenz von v in der Summe vorkommt. Denn sonst wäre $z^t y \in (u)$. Und weil z,u,y ein Parametersystem ist, ist $u \notin (z)$. Es folgt

$y \notin (u)$, was ein Widerspruch dazu ist, daß z,u,y ein Parametersystem ist. Da eine reine Potenz von u vorkommt, folgt: α teilt grad(y) . Da eine reine Potenz von v vorkommt, folgt: β teilt grad(y) . Da $ggT(\alpha,\beta) = 1$ gibt es $\gamma \in \mathbb{N}, \gamma > 0$ mit $\text{grad}(y) = \gamma\alpha\beta$. Für jeden Summanden $a_{ij} u^i v^j$ gilt nun $i\alpha + j\beta = \gamma\alpha\beta$. Wegen $ggT(\alpha,\beta)=1$ existieren $\tilde{i},\tilde{j}$ mit $i = \tilde{i}\beta$, $j = \tilde{j}\alpha$ und $\tilde{i} + \tilde{j} = \gamma$. Also hat der Summand die Form $a_{ij}(u^\beta)^i(v^\alpha)^{(\gamma-1)}$. Damit haben wir eine Gleichung der verlangten Form.

Wir zeigen nun $t > 0$. Bei $t = 0$ wäre mit der Folge z,u,y auch die Folge z,u, $\sum_{i=0}^{\gamma} a_i u^{\beta i} v^{\alpha(\gamma-1)}$ ein Parametersystem. Da ich vom letzten Element Vielfache von u abziehen kann, wäre auch z,u, $a_0 v^{\alpha\gamma}$ ein Parametersystem und dann aber auch z,u,v . Dies wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Nun wollen wir zeigen, daß A_0 eine Einheit ist. Dazu betrachten wir die Erweiterung $k\langle z,y,u\rangle \subseteq A$. Das Element v hat über $k\langle z,y,u\rangle$ ein Minimalpolynom. Nehmen wir einmal an, der Grad dieses Minimalpolynomes sei kleiner als $\gamma\alpha$. Dann hätten die Koeffizienten dieses Minimalpolynomes (bezüglich δ) höchstens einen Grad $< \gamma\alpha\beta = \text{grad}(y)$. Das Element y kann also bei ihnen nicht vorkommen. Die Koeffizienten des Minimalpolynomes liegen daher in $k\langle z,u\rangle$. Betrachtet man dann aber diese Gleichung in $\hat{A}_{\mathfrak{P}_+}$, so sieht man, solch eine Beziehung kann nicht in dem regulären, lokalen Ring bestehen.

Da unsere Gleichung aus 1) für y ja zeigt, daß das Minimalpolynom den Grad $\leq \gamma\alpha$ hat, folgt also: Das Minimalpolynom hat den Grad $\gamma\alpha$. Also ist unsere Gleichung einfach das a_0-fache des Minimalpolynoms. Da aber eines der a_i eine Einheit ist, folgt, daß a_0 eine Einheit ist.

4. Schritt: $ggT(\alpha,\beta) = 1$.

Beweis: Falls m ein gemeinsamer Teiler von α und β ist, so folgt aus (5.3)1), daß jedes homogene Element einen Grad hat, der ein Vielfaches von m ist. Also wäre $\frac{1}{m}\delta$ auch noch eine semihomogene Derivation auf A. Daher wäre m=1, da δ normiert ist.

5. Schritt: Es gibt ein homogenes Element $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_+$ derart, daß $z,u,\tilde{y}$ ein Parametersystem in A ist.

Beweis: Da (z) Primideal und $u \notin (z)$ ist, ist z,u der Anfang eines Parametersystems. Da die homogenen Elemente von $\bar{A} := A/(z,u)$ die Bilder homogener Elemente von A sind, ist $\bar{A}$ sogar eine homogene Algebra. Also kann ich nach (1.17) ein homogenes $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_+$ finden, dessen Restklasse in $\bar{A}$ ein Parametersystem ist. Dann ist $z,u,\tilde{y}$ ein Parametersystem in A.

6. Schritt: Es gibt ein homogenes Element $y \in \mathcal{Y}_+$ derart, daß z,u,y ein Parametersystem in A ist, und es gibt $\gamma,t \in \mathbb{N}$ $\gamma,t > 0$ und $a_\gamma,\ldots,a_0 \in k\langle z\rangle$ mit $a_0=1$ und

$$z^t y = \sum_{i=0}^{\gamma} a_i \, (u^\beta)^i (v^\alpha)^{(\gamma-i)}$$

Beweis: Mit $\tilde{y}$ können wir (5.3)2) anwenden und erhalten eine derartige Gleichung, bei der eventuell noch $a_0 \neq 1$ ist. Wenn wir $y := a_0^{-1}\,\tilde{y}$ setzen, erhalten wir nach Malnehmen mit a_0^{-1} eine Gleichung der von uns beschriebenen Form.

7. Schritt: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, so daß $\sum_{i=0}^{\gamma} a_i T^{\gamma-i} \in k\langle w\rangle[T]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Dabei sei $\bar{}: k\langle z\rangle \longrightarrow k\langle w\rangle$ die Abbildung $z \longmapsto w^m$ und w eine

Unbestimmte über k.

Beweis: Dies ist ein klassischer Satz, der schon auf Newton zurückgeht.

8. Schritt: Das Polynom $T^m - z \in \mathrm{Quot}(A)[T]$ ist irreduzibel.

Beweis: Wir verwenden (3.4). Sei also $\tilde{z}^l = z$ mit $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$. Wir können o.B.d.A. $\tilde{z}$ als homogen annehmen. Dann ist $\mathrm{grad}(\tilde{z}) = 0$, also $\tilde{z} \in A_0$. Da aber $A_0 = k\langle z \rangle$ ist, ist dies ein Widerspruch.

9. Schritt: Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$. $L := K[T]/(T^m - z)$ ist nach dem 8-ten Schritt ein Erweiterungskörper von K. Sei w die Restklasse von T in L, also $w^m = z$. B sei die ganze Hülle von A in L. Natürlich ist $w \in B$.

Es gelten:

1) $B = A[w]$.
2) Für alle Ideale $\mathfrak{a} \leq A$ ist $\mathfrak{a}B \cap A = \mathfrak{a}$.
3) Durch $\delta(w) = 0$ kann ich δ auf B fortsetzen, und mit dieser Derivation ist B eine normale, semihomogene k-Algebra der Kodimension 2. Ferner gilt $\mathfrak{P}_{+B} = B\mathfrak{P}_{+A}$.
4) Das Element $w \in B$ ist ein Primelement mit $B_0 = k\langle w \rangle$.
5) Die Folge $\frac{u}{1}, \frac{v}{1} \in B_{\mathfrak{P}_{+B}}$ ist ein reguläres Parametersystem, und es ist $u, v \notin (w)$.
6) Die Folge w,u,v ist kein Parametersystem in B.
7) Die Folge w,u,y ist ein Parametersystem in B, und es gilt die Gleichung:

$$w^{mt} y = \sum_{i=0}^{\chi} a_i u^{\beta i} v^{\alpha(\gamma - i)}$$

Beweis: Zu 1): Aus (5.4) folgt, daß $A[w]$ ein normaler Ring ist. Da B offensichtlich die Normalisierung von $A[w]$ ist, folgt $B = A[w]$.

Zu 2): Weil $A \subseteq B$ wegen 1) eine freie Erweiterung ist, also speziell eine treuflache Erweiterung ist, folgt diese Gleichung nach [Mat] (4.C).

Zu 3): Da $\delta(z) = 0$ ist, kann man δ auf die beschriebene Art fortsetzen. Es ist trivial, daß B eine analytische k-Algebra ist. Falls $\mathfrak{m}_A = (x_1,\ldots,x_n)$ mit homogenen Elementen $x_i \in A$ ist, so ist $\mathfrak{m}_B = (x_1,\ldots,x_n,w)$, und dies zeigt, daß δ semihomogen auf B ist. Mittels (1.7) folgt aus diesen beiden Gleichungen übrigens auch $\mathfrak{P}_{+B} = B\mathfrak{P}_{+A}$. Daraus wiederum folgt $\operatorname{codim}\mathfrak{P}_{+B} = 2$ nach [Mat] (13.C).

Zu 4): $B/(w) \cong A[T]/(T^m-z)/(T) \cong A[T]/(T^m-z,T) \cong A[T]/(z,T) \cong A/(z)$. Da z ein Primelement ist, ist auch w ein Primelement. $B_0 = k\langle w\rangle$ ist trivial.

Zu 5): Wir berechnen zuerst Vzw_A^B mit [Sch-St] §17 zu: $\operatorname{Vzw}_A^B = V(mw^{m-1}) = V(w)$. Da $w \notin \mathfrak{P}_{+B}$ ist, ist $A \subseteq B$ in $\mathfrak{P}_{+B}$ unverzweigt. Nach (1.8) gilt $\mathfrak{P}_{+B} \cap A = \mathfrak{P}_{+A}$. Nach [Sch-St] (3.3) gilt $\mathfrak{P}_{+A}{}^B\mathfrak{P}_{+B} = \mathfrak{P}_{+B}{}^B\mathfrak{P}_{+B}$, woraus man abliest, daß $\frac{u}{T},\frac{v}{T}$ auch in B ein reguläres Parametersystem ist.

Wäre $u \in (w)$, so wäre $u^m \in Bw^m \cap A = Bz \cap A = Az$ nach 2). Dann aber, weil Az ein Primideal ist, würde $u \in (z)$ folgen, ein Widerspruch zum 2-ten Schritt. Analog für v.

Zu 6): Falls w,u,v ein Parametersystem wäre, so wäre auch $z=w^m$,u,v ein Parametersystem in B. Wir zeigen die Folge z,u,v ist dann auch in A ein Parametersystem. Sei $a \in \mathfrak{m}_A$. Dann ist $a^l \in B(z,u,v)$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a^l \in B(z,u,v) \cap A =$

$A(z,u,v)$ nach 2). Also $\sqrt{A(z,u,v)} = \mathcal{M}_A$. Damit ist z,u,v Parametersystem in A im Widerspruch zu Schritt 3.

Zu 7): trivial.

(5.4) Sei A ein normaler Ring und $z \in A$ keine Einheit, sodaß A/Az ein reduzierter Ring ist. L sei ein Erweiterungskörper von A, und es sei $w \in L$ mit $w^m = z$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$. Die Elemente $1,w,\ldots,w^{m-1}$ seien A-linear unabhängig. Dann ist $A[w]$ ein normaler Ring.

Beweis: Sei $B := A[w]$ und C die Normalisierung von B. Ich zeige z ist kein Nullteiler auf C/B. Sei $x \in C$ mit $zx \in B$, also $zx = a_j w^j + \ldots + a_{m-1} w^{m-1}$ mit $0 \leq j \leq m-1$ und $a_i \in A$. Wir zeigen gleich, daß $a_j \in Az$ ist. Mit dieser Information kann man in dem Ausdruck für zx den Term $a_j w^j$ abbauen. Nach mehreren dieser Schritte hat man dann $x \in B$ gezeigt.

Teilen durch z und Malnehmen mit w^{m-1-j} liefert:

$$xw^{m-1-j} = \frac{1}{z} a_j w^{m-1} + \frac{w^m}{z} (a_{j+1} + \ldots + a_n w^{m-j-2})$$

Da $w^m = z$ ist, ist $\frac{w^m}{z} = 1$. Der eingeklammerte Ausdruck ist aus $B \subseteq C$. Da $x \in C$ ist, ist auch $xw^{m-1-j} \in C$. Also ist $\frac{1}{z} a_j w^{m-1} \in C$. Da A normal ist, gilt:

$$A \ni N\left(\frac{1}{z} a_j w^{m-1}\right) = \left(\frac{a_j}{z}\right)^m \cdot (N(w))^{m-1} = \pm \frac{a_j^m}{z^m} z^{m-1}$$

Dabei ist N die Normabbildung von Quot(B) über Quot(A). Es folgt $a_j^m \in Az$. Weil A/Az reduziert ist, folgt wie verlangt $a_j \in Az$.

Also ist z kein Nullteiler auf C/B. Andererseits ist die Diskriminante von B über A bis aufs Vorzeichen eine Potenz von z. Diese Diskriminante ist aber ein Nullteiler auf C/B.

Damit folgt C/B = O, also C = B normal.

10. Schritt: Es gibt ein $\tilde{y} \in B$, so daß $\operatorname{grad}(\tilde{y}) = \alpha\beta$ und $w,u,\tilde{y}$ ein Paramtersystem in B ist.

Beweis: Nach dem 7-ten Schritt gibt es $g_0,\ldots,g_\gamma \in k\langle w\rangle$ mit:

$$w^{mt}y = \sum_{i=0}^{\gamma} a_i\,(u^\beta)^i(v^\alpha)^{(\gamma-i)} = \prod_{j=1}^{\gamma}(v^\alpha - g_j\,u^\beta)$$

Man schreibe jetzt $v^\alpha - g_j\,u^\beta = w^{t_i}y_i$ nach (5.2) mit $t_i \in \mathbb{N}$ und $y_i \notin (w)$. Es gilt $w^{mt}y = w^{t_1+\ldots+t_\gamma}y_1\cdot\ldots\cdot y_\gamma$, und, weil (w) ein Primideal ist, gilt $y_1\cdot\ldots\cdot y_\gamma \notin (w)$. Da w,u,y ein Parametersystem ist, ist $y \notin (w)$. Aus der Eindeutigkeitsaussage von (5.2) folgt $y = y_1\cdot\ldots\cdot y_\gamma$. Dann gibt es ein i_0 , so daß z,u,y_{i_0} ein Parametersystem in B ist. Aber alle y_i haben den Grad $\alpha\beta$.

11. Schritt: B ist ein Ring vom Typ II, und $\mathfrak{y}_{+B}$ wird von u,v und y erzeugt.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus (5.5) und die zweite aus (1.7).

(5.5) Sei A eine normale, semihomogene k-Algebra der Kodimension 2. Es gelten:

1) Es gibt ein Primelement $z \in A$ mit $A_0 = k\langle z\rangle$.
2) Es gibt homogene Elemente $u,v \in \mathfrak{y}_+$ derart, daß $\frac{u}{1},\frac{v}{1}$ ein reguläres Parametersystem von $A_{\mathfrak{y}_+}$ ist und $u,v \notin (z)$ gilt. Wir setzen $\alpha := \operatorname{grad}(u)$ und $\beta := \operatorname{grad}(v)$. Es sei $\operatorname{ggT}(\alpha,\beta) = 1$.

3) Die Folge z,u,v ist kein Parametersystem in A.

4) Es gibt ein homogenes Element $y \in A$ derart, daß $\operatorname{grad}(y) = \alpha\beta$ und z,u,y ein Parametersystem ist.

Dann ist

$$A = k\langle Z,Y,U,V\rangle / (Z^tY - V^\alpha - g\,U^\beta) \quad ,$$

wobei $g \in k\langle Z\rangle$ eine Einheit ist und $t \in \mathbb{N}$ mit $t > 0$. Dabei bildet die Isomorphie z auf Z, u auf U, v auf V und y auf aY, mit $a \in k\langle Z\rangle$ Einheit, ab. Speziell ist A ein Ring vom Typ II.

Beweis: Wir wenden zuerst einmal (5.3)2) an und erhalten eine Gleichung: $z^ty = a_1u^\beta + a_0v^\alpha$ mit $t \in \mathbb{N}$, $t > 0$ und $a_0, a_1 \in k\langle z\rangle$, wobei a_0 eine Einheit ist. Setzt man $\tilde{y} := a_0^{-1}\, y$, so folgt eine Gleichung

$$z^t\tilde{y} = v^\alpha + g\,u^\beta \quad \text{mit } g \in k\langle z\rangle \quad .$$

Ich behaupte: g ist eine Einheit. Falls g keine Einheit wäre, so wäre $v^\alpha \in (z)$. Da (z) Primideal ist, würde $v \in (z)$, ein Widerspruch, folgen.

Wie im Beweis von (5.3) sieht man, daß diese Gleichung das Minimalpolynom von v über $k\langle z,u,\tilde{y}\rangle$ ist. Also hat man eine kanonische injektive Abbildung

$$k\langle Z,Y,U,V\rangle / (Z^tY - V^\alpha - g\,U^\beta) \longrightarrow A \quad .$$

Da beide Ringe denselben Quotientenkörper haben (siehe (5.3)1) und der linke Ring normal ist (siehe 4.4)), folgt, daß die obige Abbildung der gesuchte Isomorphismus ist.

12. Schritt: Es gibt ein homogenes Element $\tilde{\tilde{y}} \in A$ derart, daß $\operatorname{grad}(\tilde{\tilde{y}}) = \alpha\beta$ und $z,u,\tilde{\tilde{y}}$ ein Parametersystem in A ist.

Beweis: Da $\mathfrak{p}_{+A}$ ein homogenes Ideal ist, gibt es homogene

Elemente $h_1,\ldots,h_r$, so daß $\mathfrak{y}_{+A} = (u,v,h_1,\ldots,h_r)$ gilt. Dann ist nach dem 9-ten Schritt 3): $\mathfrak{y}_{+B} = B\mathfrak{y}_{+A} = B(u,v,h_1,\ldots,h_r)$. Nach dem 11-ten Schritt gibt es nach Nakayama ein i_0 mit $\mathfrak{y}_{+B} = (u,v,h_{i_0})$. Nun gilt mit (1.8) $\mathfrak{y}_{+A} = \mathfrak{y}_{+B} \cap A = B(u,v,h_{i_0}) \cap A$ $A(u,v,h_{i_0})$ nach 2) im 9-ten Schritt. Man sieht im Ring $\bar{B} := B/(u,v)$ am Hauptideal $\mathfrak{y}_{+\bar{B}}$, daß $\operatorname{grad}(h_{i_0}) = \alpha\beta$ ist. Da $\mathfrak{m}_A = (z) + \mathfrak{y}_{+A}$ ist, folgt $\mathfrak{m}_A = (u,v,z,h_{i_0})$. In $\bar{A} := A/(z,u)$ sind v^α und h_{i_0} Elemente vom Grade $\alpha\beta$, auf die ich die Konstruktion von [G-R] II §4 Satz 11 anwenden kann. Damit erhalte ich ein homogenes Element $\tilde{\tilde{y}} \in A$ mit den verlangten Eigenschaften.

13. Schritt: A ist ein Ring vom Typ II.

Beweis: Mit Schritt 12 hat man alle Voraussetzungen für den Satz (5.5) zusammen.

Damit ist (5.1) vollständig bewiesen.

(5.6) Satz: Sei A eine semihomogene k-Algebra der Kodimension 2, die eine normale, isolierte Singularität ist. Ferner sei das von $A_0 \cap \mathfrak{m}_A$ erzeugte Ideal ein Primideal. Dann ist A ein Ring vom Typ I oder vom Typ II. Dabei kann man im Falle des Typ II noch t=1 in (4.2) wählen.

Beweis: (5.1) und (4.4)2).

(5.7) Satz: Sei A eine semihomogene k-Algebra der Kodimension 2, die eine normale, isolierte Singularität ist. Ferner sei das von $A_0 \cap \mathfrak{m}_A$ erzeugte Ideal ein Primideal,

Dann gilt:

1) A ist (mit einer anderen Derivation) homogen.

2) A ist faktoriell.

Beweis: (5.6) und (4.7) und (4.8).

§ 6 Indefinit-homogene Derivationen

In diesem Kapitel wollen wir etwas über die Derivationen sprechen, die auch negative ganze Zahlen als Eigenwerte haben können. Wir nennen diese Derivationen indefinit-homogen.

(6.1) Def: Sei A eine analytische k-Algebra. δ heißt eine indefinit-homogene Derivation auf A, wenn δ eine k-Derivation von A ist und es ein Erzeugendensystem $x_1,\ldots,x_n$ von m_A und Zahlen $m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{Z}$ mit $\delta(x_i) = m_i x_i$ für alle i gibt.

Man kann jetzt viele der Sätze aus §1 auch für diese Art von Derivationen beweisen. So überträgt sich zum Beispiel (1.2) sofort, nur daß die Summe jetzt über die Indexmenge $\mathbb{Z}$ läuft. Die Definition von "grad" aus (1.3) können wir auch übernehmen. Die Theorie der homogenen Ideale, (1.9) bis (1.11), gilt auch weiterhin. Eine Normiertheit nach dem Muster von (1.14) kann ich auch wieder definieren.

(6.2) Def: Sei A eine analytische k-Algebra. δ sei eine indefinit-homogene Derivation auf A.

a) Mit $\mathfrak{y}_+$ bezeichnen wir das Ideal in A, daß von allen Eigenvektoren mit positivem Eigenwert erzeugt wird.

b) Mit $\mathfrak{y}_-$ bezeichnen wir das Ideal in A, daß von allen Eigenvektoren mit negativem Eigenwert erzeugt wird.

Bei den von uns im Folgenden studierten Typ sind $\mathfrak{y}_+$ und

$\mathcal{P}_-$ zwar Primideale, aber im Allgemeinen braucht dies nicht der Fall zu sein.

Wir definieren jetzt den Typ, der uns im Weiteren interessiert:

(6.3) Def: Sei g ein Primelement im konvergenten Potenzreihenring $k\langle U,V\rangle$ in zwei Veränderlichen. In dem konvergenten Potenzreihenring $k\langle X,Y,U,V\rangle$ betrachten wir das Element:

$$XY - g$$

und setzen

$$A := k\langle X,Y,U,V\rangle/(XY - g) \quad .$$

Die Derivation $X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y}$ läßt unser Element invariant und induziert daher auf A eine k-Derivation δ . Der Ring A versehen mit δ , und natürlich alle dazu isomorphen Ringe mit Derivation, nennen wir einen Ring vom Typ III.

(6.4) Satz: Sei A ein Ring vom Typ III und δ die Derivation auf A. Dann gelten:

1) A ist eine faktorielle, normale, isolierte Singularität.
2) δ ist eine indefinit-homogene Derivation, die normiert ist. Es gilt codim $\mathcal{P}_+ = 1$ und codim $\mathcal{P}_- = 1$, und beide Ideale sind Primideale.

Beweis: Zu 1): Wir verwenden (4.5). Dazu berechnen wir den singulären Ort von A:

$$\text{Sing } A = V(XY - g,\ Y,\ X,\ \tfrac{\partial g}{\partial U}\ ,\ \tfrac{\partial g}{\partial V}) = V(X,\ Y,\ g,\ \tfrac{\partial g}{\partial U}\ ,\ \tfrac{\partial g}{\partial V}) \quad .$$

Da g als Primelement speziell reduziert ist, ist codim Sing A = 3 , also ist A eine isolierte Singularität.

Aus (4.5) folgt auch die Normalität. Aus [B-St] (13.5) folgt: A ist faktoriell.

Zu 2): Seien x,y,u,v die Restklassen von X,Y,U,V in A. Da $\mathfrak{m}_A = (x,y,u,v)$, $\delta(x) = x$, $\delta(y) = -y$ und $\delta(u) = \delta(v) = 0$ sind, ist δ indefinit-homogen. Da grad(x) = 1 ist, ist δ normiert. Man sieht sofort $\mathfrak{p}_+ = Ax$ und $A/\mathfrak{p}_+ = k\langle Y,U,V\rangle/(g$ Da g Primelement ist, ist $\mathfrak{p}_+$ ein Primideal. Für $\mathfrak{p}_- = Ay$ gilt eine analoge Rechnung.

Wir brauchen jetzt einen Hilfssatz:

(6.5) Sei A eine analytische k-Algebra, die eine normale, isolierte Singularität ist. δ sei eine indefinit-homogene Derivation auf A, die normiert ist. Es gebe ein Parametersystem x,y,z von A mit $\delta(x) = mx$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $\delta(y) = -ny$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ und $z \in A_0$. Die Ideale Ax und Ay seien reduziert.

Dann gibt es ein reduziertes $g \in k\langle U,V\rangle$ mit

$$A \cong k\langle X,Y,U,V\rangle/(XY - g) \quad .$$

Bei dieser Isomorphie wird x auf X und y auf Y abgebildet. δ entspricht dabei auf der rechten Seite der von $X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y}$ induzierten Derivation. Speziell ist n = m = 1 .

Beweis: Ich zeige zuerst $Ax = \mathfrak{p}_+$. Sei $v \in A$ homogen mit positivem Grad 1. Ich betrachte sein Minimalpolynom über dem Ring $k\langle x,y,z\rangle$:

$$v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Man weiß, daß $\mathrm{grad}(a_i) = (n-i)1$ ist. In $k\langle x,y,z\rangle$ sieht man $a_i \in Ax$. Also $v^n \in Ax$. Da Ax reduziert ist, folgt $v \in Ax$.

Also haben wir $\mathfrak{p}_+ \subseteq Ax$. Die Umkehrung ist wegen $m > 0$ klar.

Analog sieht man $Ay = \mathfrak{p}_-$.

Wir betrachten nun den Ring $\bar{A} := A_0\langle X,Y\rangle$, wobei X,Y zwei Unbestimmte seien sollen. Auf diesem Ring betrachten wir die Derivation $mX\frac{\partial}{\partial X} - nY\frac{\partial}{\partial Y}$. Ferner betrachten wir den k-Algebrahomomorphismus $\alpha: \bar{A} \longrightarrow A$, der auf A_0 die Identität ist und X auf x und Y auf y abbildet. Man sieht sofort, daß α verträglich ist mit den auf den beiden Ringen definierten Derivationen.

Ich behaupte: α ist surjektiv. Nach [G-R] II §2 Satz 3 genüge es dazu, $\mathfrak{m}_A \subseteq A\alpha\bar{A}$ zu zeigen. Sei $\mathfrak{m}_A = (x_1,\ldots,x_n)$ mit $x_i \in A$ homogen. Falls $\operatorname{grad}(x_i) = 0$ ist, ist x_i in A_0 , also im Bild von α . Falls $\operatorname{grad}(x_i) > 0$ ist, so ist $x_i \in \mathfrak{p}_+ = Ax = A\alpha(X)$. Falls $\operatorname{grad}(x_i) < 0$ ist, so ist $x_i \in \mathfrak{p}_- = Ay = A\alpha(Y)$.

Aus der Surjektivität sieht man nun sofort, daß die Bedingung der Normiertheit die Bedingung $\operatorname{ggT}(n,m) = 1$ ergibt.

Sei $\mathfrak{q} := \operatorname{Kern}\alpha$. Da A ein Integritätsring ist, ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal. Weil α mit den Derivationen verträglich ist, ist $\mathfrak{q}$ homogen. Ich behaupte, daß $\mathfrak{q}$ ein Erzeugendensystem aus homogenen Elementen des Grades Null hat. Ein Element positiven Grades in $\bar{A}$ hat die Form a_0X^l mit $a_0 \in (\bar{A})_0$ und $l \in \mathbb{N}$, $l > 0$. Wäre es in $\mathfrak{q}$, so würde $a_0 \in \mathfrak{q}$ folgen, weil $X \notin \mathfrak{q}$ ist, wegen $\alpha(X) = x \neq 0$. Ebenso sieht man, daß man für ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{q}$ keine Elemente negativen Grades braucht.

Sei $g := x^ny^m \in A_0$. Dann ist $X^nY^m - g \in \mathfrak{q}$. Mit $\operatorname{ggT}(n,m)=1$

berechnet man, daß jedes Element des Grades Null von $\bar{A}$ die Form $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (X^n Y^m)^i$ mit $a_i \in A_0$ hat. Modulo $X^n Y^m - g$ kann ich aber so ein Element des Grades Null in ein Element von A_0 umrechnen. Aber es ist $\sigma \cap A_0 = 0$, da ja $\alpha | A_0 = id$ ist. Also gilt $\sigma = (X^n Y^m - g)$.

Wir wählen nun eine Darstellung

$$A_0 = k\langle U_1, \ldots, U_s \rangle / (g_1, \ldots, g_t)$$

mit $g_i \in (U_1, \ldots, U_n)^2$. Aus Dimensionsgründen muß entweder $s = 2$ und $t = 0$ oder $s \geq 3$ sein. Man hat jetzt insgesamt eine Darstellung von A:

$$A = k\langle X, Y, U_1, \ldots, U_s \rangle / (g_1, \ldots, g_t, X^n Y^m - g) .$$

Ein Ideal $\alpha \subseteq A$, das den singulären Ort von A beschreibt, ergibt sich, indem man alle $s+2-3 = s-1$ reihigen Unterdeterminanten der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 & , & 0 & , & \frac{\partial g_1}{\partial U_1} & , \ldots , & \frac{\partial g_1}{\partial U_s} \end{pmatrix}$$

$$\ldots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & , & 0 & , & \frac{\partial g_t}{\partial U_1} & , \ldots , & \frac{\partial g_t}{\partial U_s} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} nX^{n-1}Y^m & , & mX^n Y^{m-1} & , & \frac{\partial g}{\partial U_1} & , \ldots , & \frac{\partial g}{\partial U_s} \end{pmatrix}$$

bildet. Da A eine isolierte Singularität ist, muß nach (4.5) $\operatorname{codim} \alpha = 3$ sein. Dann folgt $\dim A/\alpha + (u_1, \ldots, u_n) = 0$, wobei u_i die Bilder von U_i in A seien sollen. Bei $s \geq 3$ folgt aber $A/\alpha + (u_1, \ldots, u_n) \cong k\langle X, Y \rangle / (X^n Y^m)$. Also muß $s = 2$ und $t = 0$ sein.

Wir schreiben kurz U,V für U_1, U_2 und u,v für u_1, u_2 . Dann gilt $0 = \dim A/\alpha + (u,v) =$

$\dim k\langle X,Y\rangle / (X^nY^m, nX^{n-1}Y^m, mX^nY^{m-1})$. Daraus folgt $n = m = 1$. Da Ax reduziert ist, ist $g \in k\langle U,V\rangle$ reduziert, und wir haben alles gezeigt.

(6.6) Satz: Sei A eine analytische k-Algebra, die eine faktorielle, normale, dreidimensionale, isolierte Singularität ist. δ sei eine indefinit-homogene Derivation auf A, die normiert ist. Es gelte $\operatorname{codim} \mathfrak{p}_+ = \operatorname{codim} \mathfrak{p}_- = 1$. Dann ist A ein Ring vom Typ III.

Beweis: Ich zeige zuerst:

(*) Es gibt in A ein Parametersystem x,y,z mit $\delta(x) = mx$ $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ und $\delta(y) = -ny, n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Ferner ist $\delta(z) = 0$, und x und y sind Primelemente.

Wähle ein beliebiges homogenes Element $x \neq 0$ aus $\mathfrak{p}_+$. Da die assoziierten Primideale auch wieder homogen sind, kann ich eine homogene Primfaktorzerlegung $x = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l$ finden. Da $\operatorname{grad}(x) > 0$ ist, muß auch eines der p_i einen positiven Grad haben, und o.B.d.A. kann ich also annehmen, daß x ein Primelement ist. Aus Dimensionsgründen ist $\mathfrak{p}_+ = (x)$.

Analog zeigt man, daß $\mathfrak{p}_- = (y)$ mit einem homogenen Primelement y ist. Da $\mathfrak{p}_+ \neq \mathfrak{p}_-$ ist, folgt, daß x,y der Anfang eines Parametersystems ist.

δ induziert auf $\bar{A} := A/\mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_- = A/(x,y)$ die Nullderivation. Ich kann also ein $z \in A_0$ wählen, so daß die Restklasse von z in $\bar{A}$ ein Parametersystem ist. Damit ist (*) gezeigt.

(*) erlaubt uns jetzt (6.5) anzuwenden. Also gilt

$A \cong k\langle X,Y,U,V\rangle/(XY - g)$. Da x Primelement ist, folgt $A/(x) \cong k\langle Y,U,V\rangle/(g)$ ist ein Integritätsring. Also ist g ein Primelement.

Literaturverzeichnis

[B-St] Bingener, J. und Storch, U.: *Zur Berechnung der Divisorenklassengruppen kompletter lokaler Ringe.* Nova acta leopoldina NF 52 Nr. 240, 7-63 (1981)

[Car] Cartan, H.: *Quotient d'un Espace Analytique par un Groupe d'Automorphismes.* Algebraic Geom. a. Topology Princeton, 90-102 (1957)

[G-R] Grauert, H. und Remmert, R.: *Analytische Stellenalgebren.* Springer-Verlag New York - Heidelberg - Berlin (1970)

[Mat] Matsumura, H.: *Commutative Algebra.* W.A. Benjamin, Inc. New York (1970)

[RSV] Reiffen, H., Scheja, G. und Vetter, U.: *Algebra.* Bibliographisches Institut Mannheim - Wien - Zürich (1969)

[Sam] Samuel, P.: *Classes de Diviseurs et derivées Logarithmiques.* Topology, Vol. 3, 81-96 (1964)

[Sch] Scheja, G.: *Differentialmoduln lokaler analytischer Algebren.* Schriftenreihe Math. Inst. Fribourg 2 (1970)

[Sch-St] Scheja, G. und Storch, U.: *Lokale Verzweigungstheorie.* Schriftenreihe Math. Inst. Fribourg 5 (1973)

[Sch-W1] Scheja, G. und Wiebe, H.: *Über Derivationen von lokalen analytischen Algebren*. Symp. Math. XI, 161-192 (1973)

[Sch-W2] Scheja, G. und Wiebe, H.: *Über Derivationen in isolierten Singularitäten auf vollständigen Durchschnitten*. Math, Ann. 225, 161-171 (1977)

[Sch-W3] Scheja, G. und Wiebe, H.: *Zur Chevalley-Zerlegung von Derivationen*. Manuscripta Math. 33, 159-176 (1980)

[Sch-W4] Scheja, G. und Wiebe, H.: *Derivationen in zweidimensionalen normalen Singularitäten*. Abh. Math. Sem. Hamburg 52, 104-119 (1982)

[St] Storch, U.: *Fastfaktorielle Ringe*. Schriftenreihe Math. Inst. Münster 36 (1967)

Lebenslauf

Ich wurde am 24.11.1953 in Castrop-Rauxel in Westfalen geboren. Meine Eltern sind der Dachdecker Max Regel und seine Ehefrau Margarete geb. Schmidt.

In Castrop-Rauxel besuchte ich von 1960 bis 1964 die Grundschule und von 1964 bis 1969 die Realschule. Anschließend besuchte ich bis zum Abitur im Jahre 1972 das Freiherr-vom-Stein-Gymnasium in Bochum.

Nach dem Wehrdienst begann ich im Wintersemester 1973/74 das Studium der Mathematik an der Ruhruniversität Bochum. Am 11.7.1978 habe ich dort die Diplomprüfung mit Nebenfach Physik abgelegt.

Nach kurzer Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft in Bochum, ging ich mit meinem Lehrer Prof. Dr. G. Scheja nach Tübingen, wo ich bis 1984 als wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut der Universität Tübingen arbeitete.

In dieser Zeit fertigte ich unter der Leitung von Herrn Prof. Scheja meine Dissertation "Über Vektorfelder in dreidimensionalen isolierten Singularitäten" an.

Meine akademischen Lehrer sind die Herren Professoren W. Bartenwerfer, E. Böger, S. Breitsprecher, A. Duma, G. Scheja, K. Schindler, R. Stöcker, M. Reeken und H. Zieschang.